

ハドロンの不定性とは何か？

@ Flavor Physics Workshop 2014 (浜名湖)

高エネルギー加速器研究機構 & 総合研究大学院大学
橋本省二
平成26年12月10日

目的

B中間子崩壊では、多くの解析でハドロンの不定性が問題になる。

- なぜそうなるのか？
- なぜ問題にならない場合もあるのか？
- どうやって回避・解決するのか？

について、基本的な考え方を理解する。

でも、自分で計算できるようにはなりません。

もくじ

前半：ハドロンの不定性とは何か？

1. QCD について

- ラグランジアン、くりこみ、漸近自由性。
- 閉じ込め、対称性の破れ。

2. 計算できる場合:

1. インクルーシブ崩壊 = 摂動 + 演算子積展開
2. 因子化 = 摂動 + 非摂動関数
3. 重いクォークの対称性
4. 軽いクォークの対称性 → カイラル有効理論

後半：格子QCD計算とは何か？

1. QCD について

素粒子物理の勉強

• 場の量子“論”

- 場の量子化
 - ボソン、フェルミオン、ゲージ場
- 量子電磁気学
- 繰り込み
- 繰り込み群
- 量子色力学
 - 非可換ゲージ場、漸近自由性...
- 破れた対称性



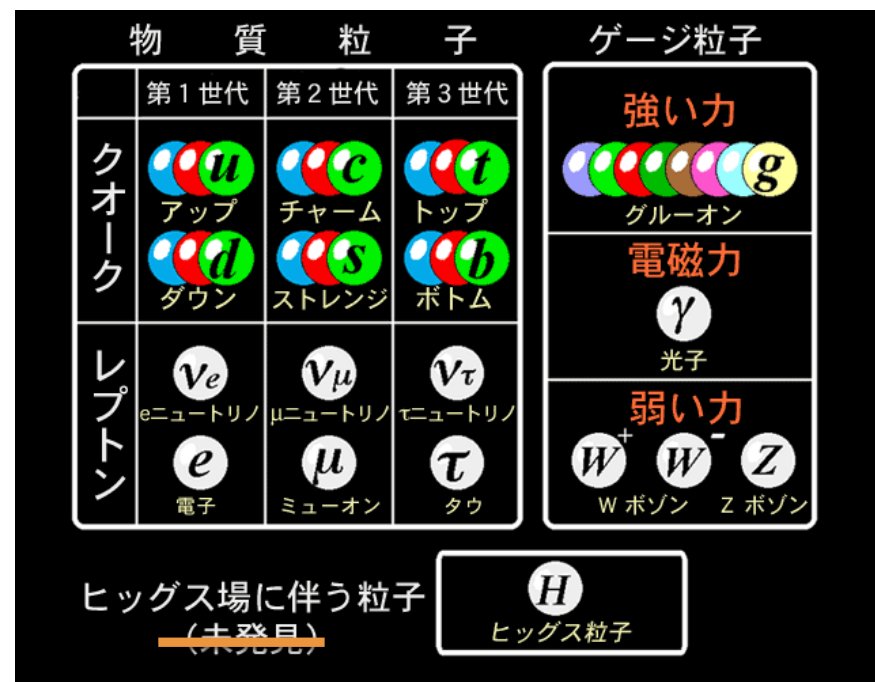
• 素粒子“物理”

- バリオンとレプトン
 - 電荷、アイソスピン
- 弱い力
 - 弱アイソスピン
 - フェルミ相互作用からW, Z粒子へ
- 強い力
 - クォーク模型
 - 閉じ込め

両者を関係づけて理解するのは大変。
特に、クォークがかかわるところ。

素粒子のおさらい

- クォークとレプトン
 - 働く力によっていろんな種類がある。
 - 強い力が働くのがクォーク、働かないのがレプトン。
 - 弱い力はアップとダウンの組に働く。
 - 電磁気力も働かないニュートリノ。
 - 3つの世代も。
 - 通常物質は第1世代だけ。
 - なぜ3世代なのかは謎。
 - 暗黒物質がない。



強い力はむずかしい

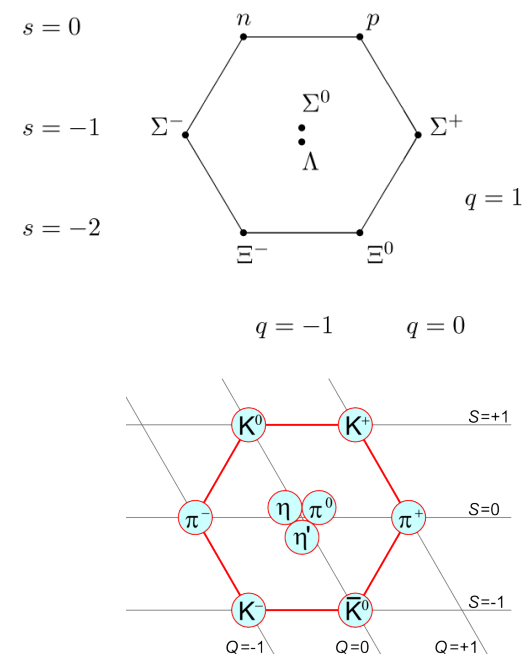
• バリオン・メソン

- クォーク模型を使ってスペクトルを理解。なるほど、もっともらしい。でもラグランジアンはどこ？
- パイ中間子は南部ゴールドストーン粒子らしい。何の？ クォークのラグランジアンを書いてみないとわからない。



• クォーク

- $N_c=3$ はどうもそうらしい。
- 非可換ゲージ理論は漸近自由。どうもそうらしい。
- クォークの閉じ込め？ ラグランジアンを見ててもわからないけど...
- カイラル対称性の破れ？ ふ～ん。



論理がつながっていないみたい。

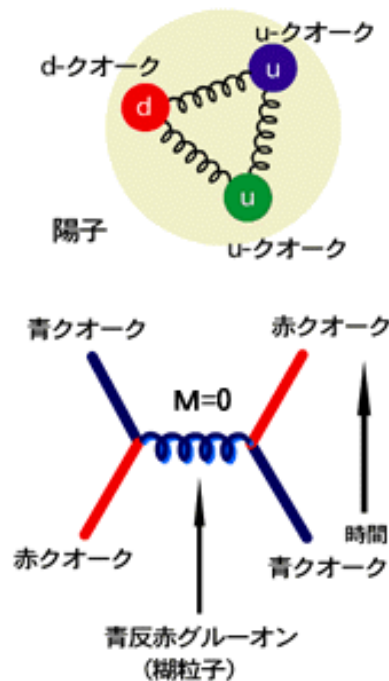
なぜそうなのか？

- 計算できないから。
 - クォークのラグランジアンはある。でもそこから先は手も足も出ない。

それでどうするの？

- 難しいことは飛ばして（素粒子物理は）先へ進む。
 - 積み残した問題のせいで、いろんなところで困っている。LHCの解析（QCDジェットの計算）、Bファクトリーの解析（B中間子崩壊の計算）。
 - ハドロン物理という学問が生まれたりする。その先に原子核。（私には）絶望的に難しい。
 - 非摂動物理が出てくるとあちこちで頓挫。

強い力



- 量子色力学(QCD)
 - 量子電気力学(QED)と似ている。ただし、
 - $U(1) \rightarrow SU(3)$: クォークがもつ3色の色荷に力が働く。
 - 光子の代わりにグルーオンをやりとり。
 - グルーオンも色をもつ。
- 漸近自由性 = 近距離では力が弱くなる

QCD (量子色力学)

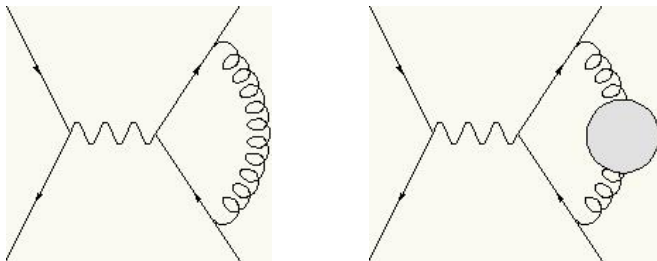
- 作用 (ラグランジアン) の積分) はこれだけ

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 + \sum_f \bar{\psi}^f (\not{D} + m_f) \psi^f \right\} \quad \begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\ D_\mu &= \partial_\mu - ig T^a A_\mu^a \end{aligned}$$

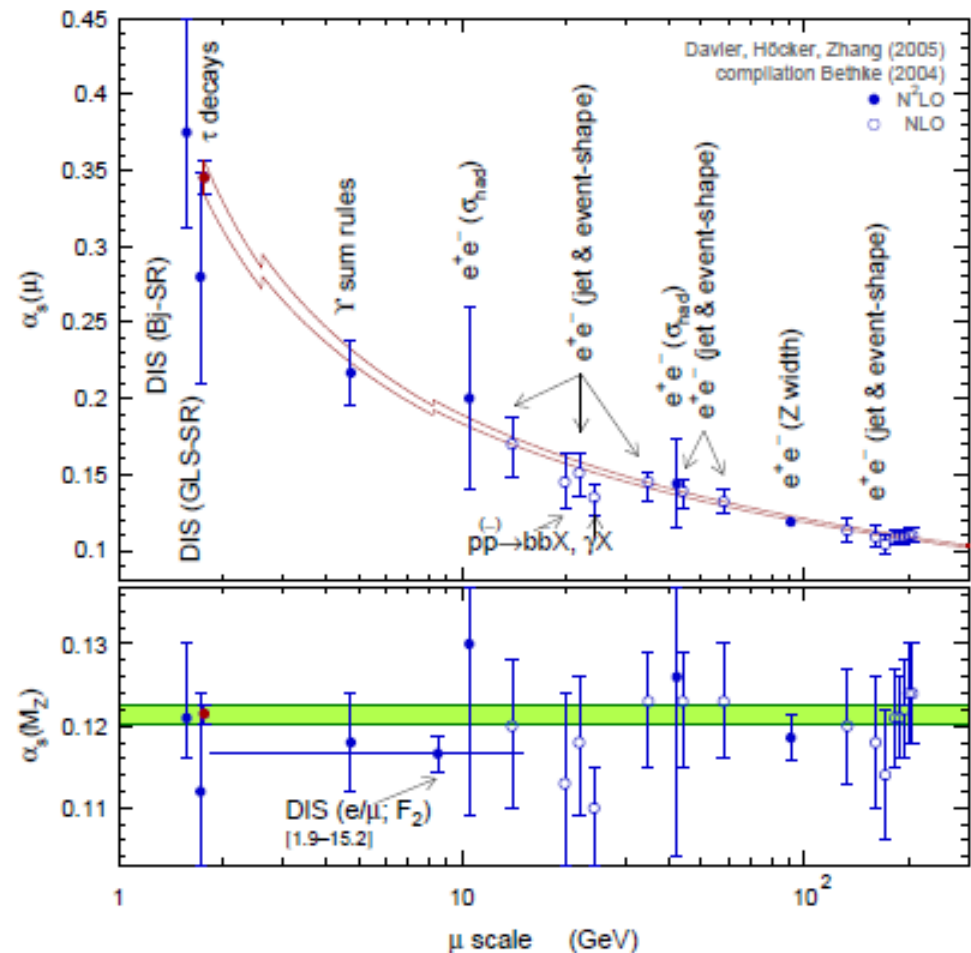
- 見た目は QED (量子電磁力学) とそんなに変わらない。
- ただし、SU(3) (非可換) ゲージ理論。つまり、“色”の自由度がある。クォークは3成分、グルーオンは8成分。
- くりこみ可能性
 - 対称性を決めれば理論が決まる。理論はほんとにこれだけ。
 - 自由になるパラメタは、結合定数 g とクォーク質量 m_f だけ。

漸近自由性

- 結合定数のスケール依存性
 - 摂動の高次項のおかげで、あたかも結合定数がエネルギースケールに依存するように見える。



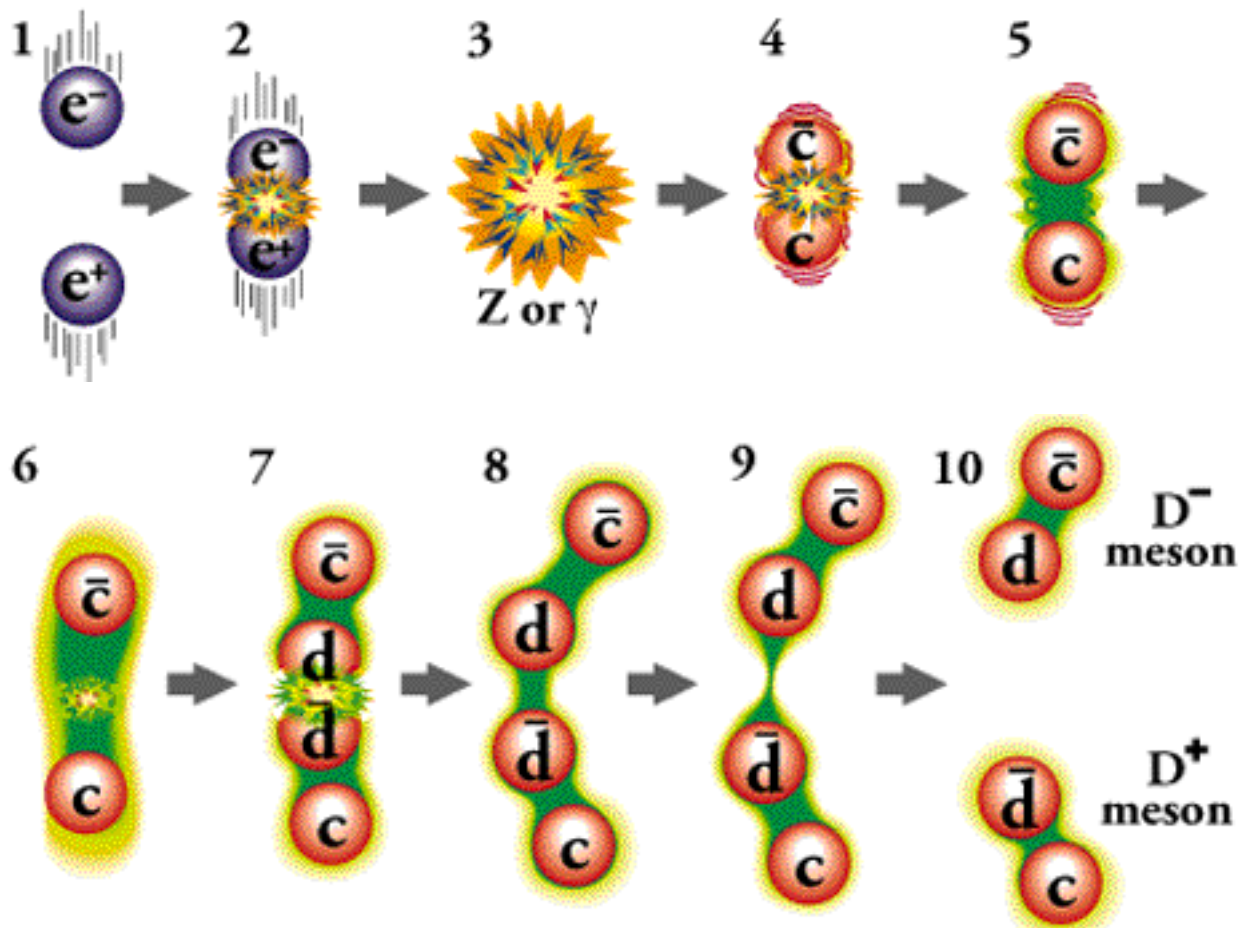
- 低エネルギーでは摂動展開が収束しない。(ほんと
はそもそも収束しない。)



とっても強い力

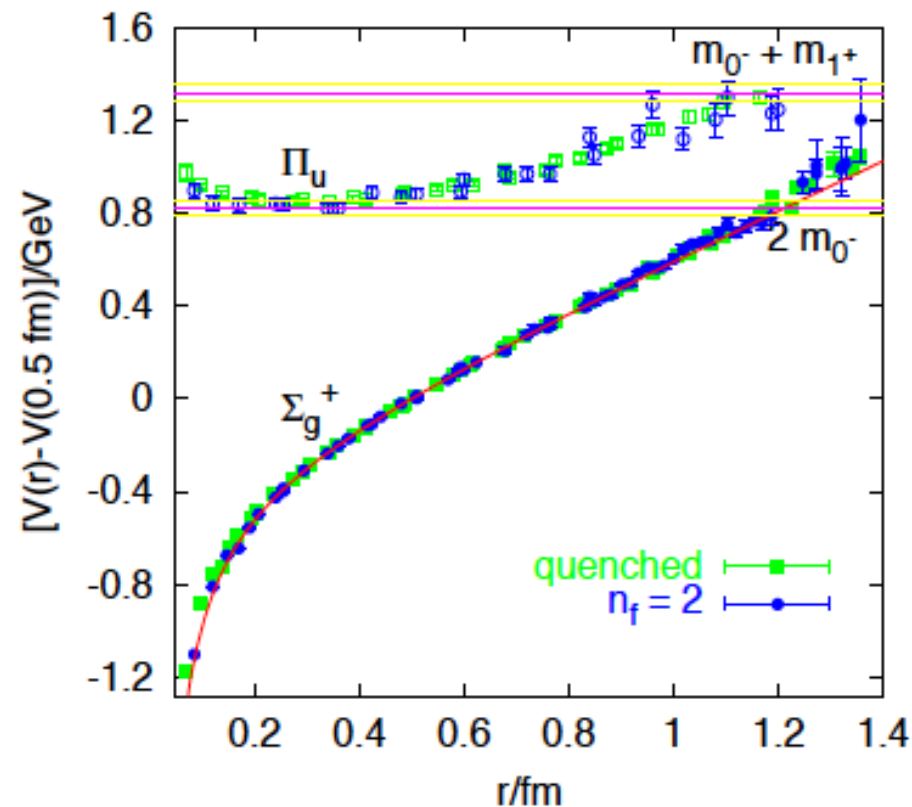
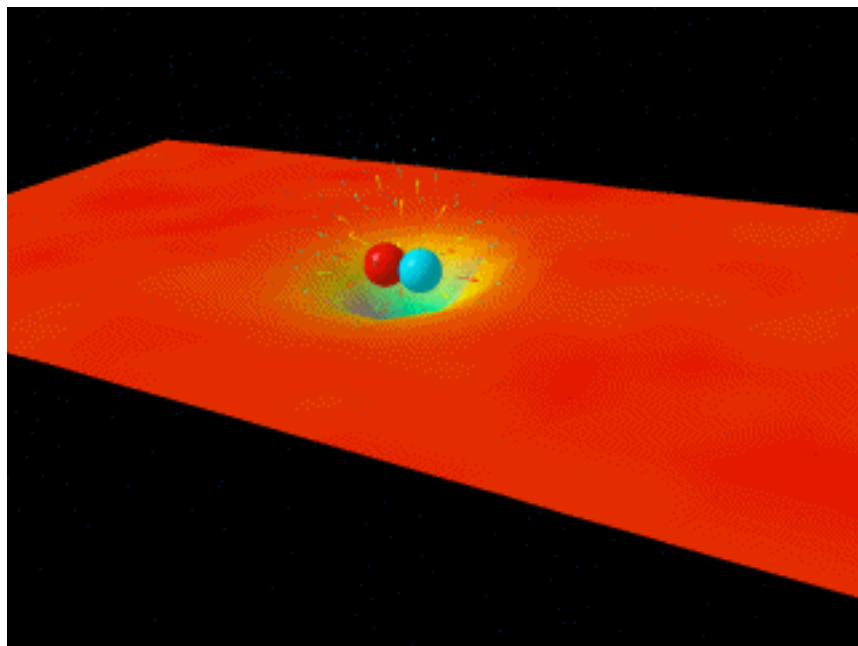
摂動的にわかるところはまだよい。
でも低エネルギーでは...

- クォークの閉じ込め



from "Particle Adventure"

クォークの閉じ込め

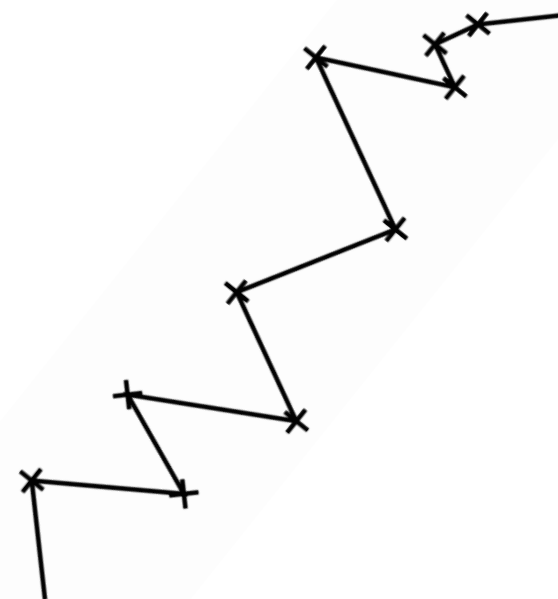
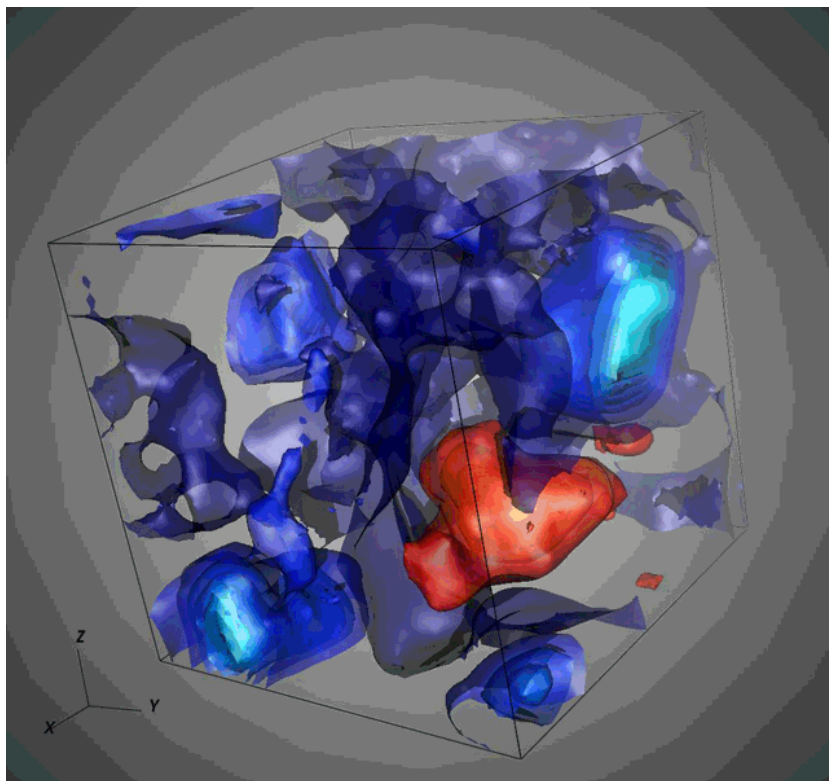


クォークを引き離すと余計にエネルギーが必要。
格子計算でも再現。

とっても強い力

摂動的にわかるところはまだよい。
でも低エネルギーでは...

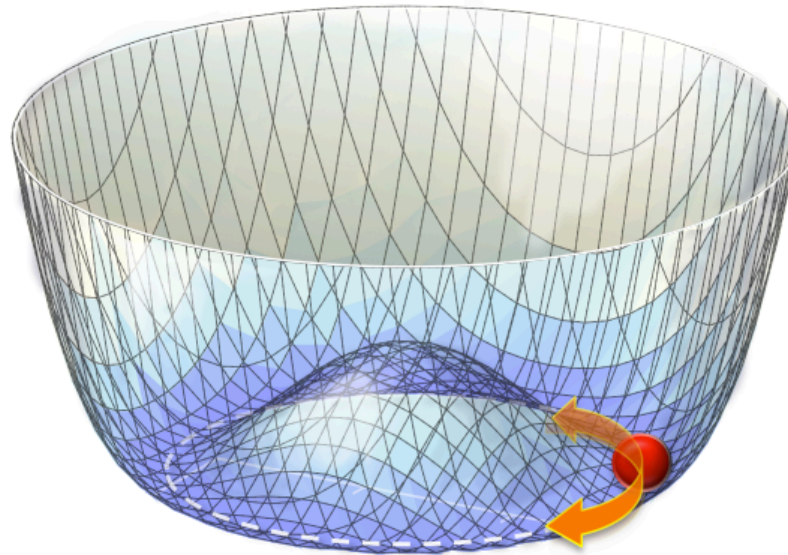
- カイラル対称性の破れ



クォーク質量の動的な生成。

カイラル対称性の破れ

- 有効モデルとしてはこうなっている



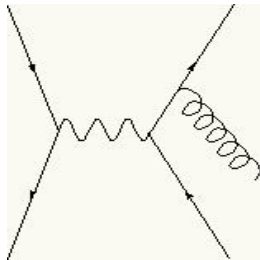
- パイ中間子は南部ゴールドストーン粒子。
- 定性的にはそれでいい。計算はどうやるの？

(計算できる場合)

2.1 インクルーシブ崩壊

QCDにおける摂動計算

- 摂動計算で扱える始状態・終状態は、クォーク or グルーオンの平面波。ハドロンではない。じゃあ何が計算できるの？
- 例えば、終状態をすべて足したもの：

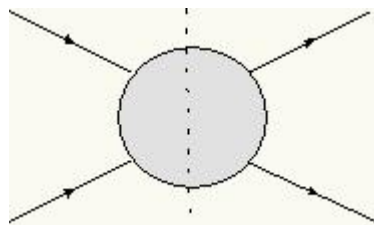


$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \frac{\sum_q \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$
$$= 3 \sum_q Q_q^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + O(\alpha_s^2) \right\}$$

- 行った先は知らないけど、もともとクォークだったはず。断面積は同じはず = 「クォーク・ハドロン双対性」の仮定。

光学定理

- 散乱振幅のユニタリー性



$$S = I + iT$$

$$I = S^\dagger S = (I - iT^\dagger)(I + iT) = I + i(T - T^\dagger) + T^\dagger T$$

$$\Rightarrow T^\dagger T = 2\text{Im} T$$

散乱断面積（終状態を足したもの）

$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ 振幅の虚部

- これなら始状態も終状態もハドロンではないので摂動計算できる。

始状態は B 中間子

- 始状態だけハドロンならまだ何とかなる

$$\Gamma \propto \sum_X |\langle X | \mathcal{H}_{eff} | B \rangle|^2$$

$$= 2 \text{Im} \int d^4x \langle B | T \left\{ \underbrace{\mathcal{H}_{eff}(x) \mathcal{H}_{eff}^\dagger(0)} \right\} | B \rangle$$

演算子積展開を使って展開

- 演算子積展開

- 短距離に置かれた 2 つの演算子を、局所演算子で展開。

$$\int d^4x T \left\{ \mathcal{H}_{eff}(x) \mathcal{H}_{eff}^\dagger(0) \right\} = C_3(\mu) O_3(\mu) + \frac{1}{(2m_Q)^2} C_5(\mu) O_5(\mu) + \dots$$

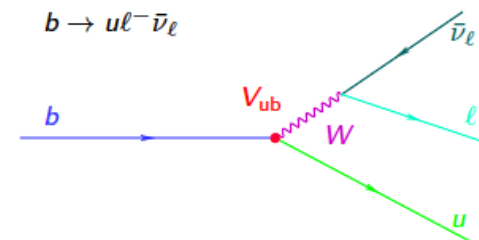
= bクォーク質量による展開

$\bar{Q}Q$

$\bar{Q}D^2Q, \bar{Q}(\sigma \cdot B)Q$

HQE (Heavy Quark Expansion)

- セミレプトニック崩壊 $b \rightarrow c$ (or u) $\ell \bar{\nu}_\ell$



$$\Gamma(\bar{B} \rightarrow X_c \ell^- \bar{\nu}_\ell) = \frac{G_F^2 m_b^5}{192\pi^2} |V_{cb}|^2 \left(1 + \frac{c_5(\mu) \langle O_5 \rangle(\mu)}{m_b^2} + \frac{c_6(\mu) \langle O_6 \rangle(\mu)}{m_b^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_b^4}\right) \right)$$

(自由な)クォーク
の崩壊

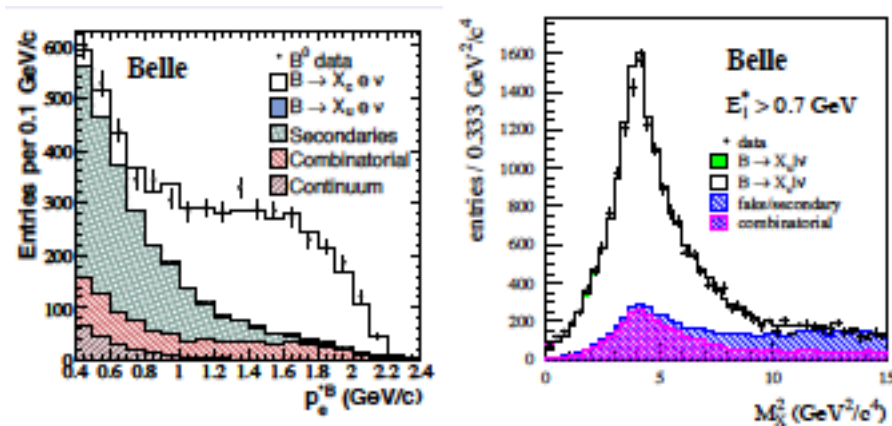
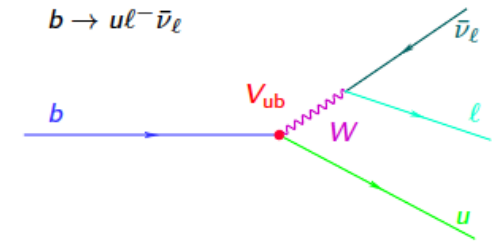
補正項
(行列要素が必要)

$$\lambda_1 \sim \mu_\pi^2 \sim \langle B | D^2 | B \rangle$$

- 理論的にしっかりしているのはここまで。
 - 行列要素はどうする？ フィット。何を？
 - 微分断面積も必要。どうすればいい？

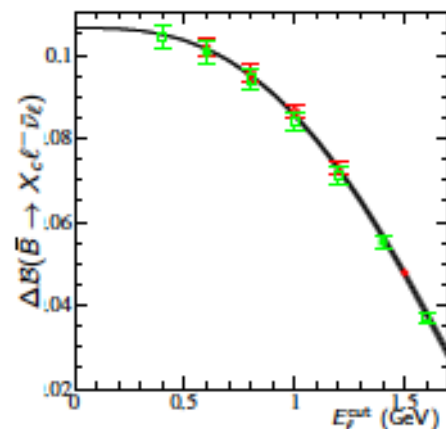
微分断面積？

- 終状態の運動量に対する依存性
 - パラメタを決めたい。
 - 実験では cut が避けられない。
 - $b \rightarrow u$ のときは、 $b \rightarrow c$ を veto したい。



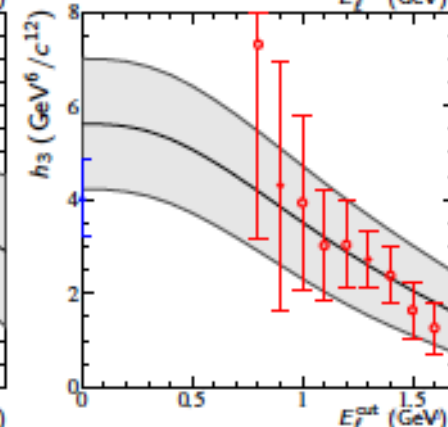
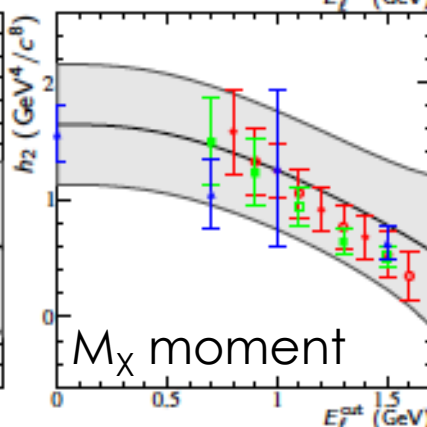
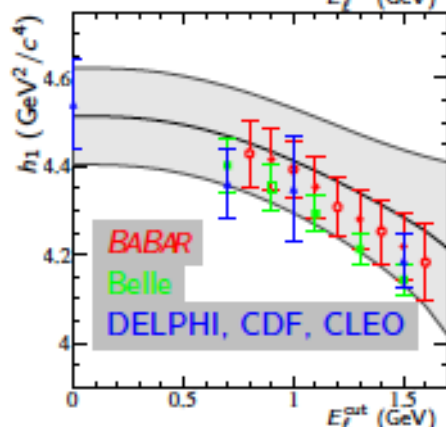
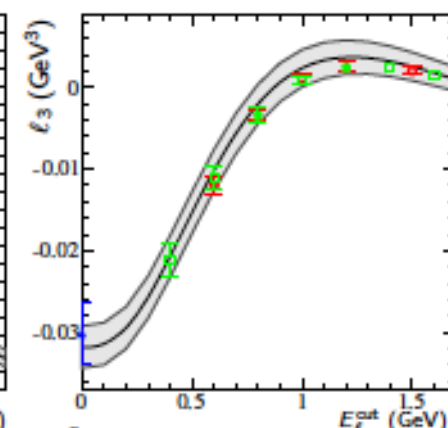
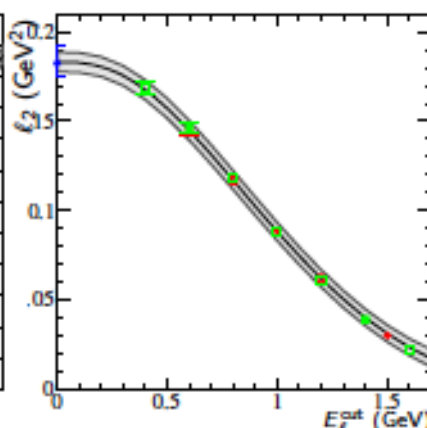
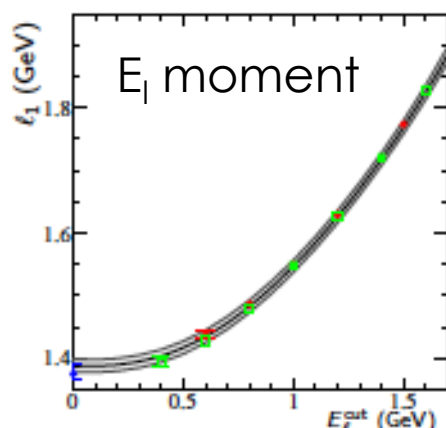
- 理論計算には仮定(クォークハドロン双対性)が入る。どれだけ正しいかは... わからない。

slide from Sibidanov @ KEK-FF 2014



HFAG2014 result

$B(\bar{B} \rightarrow X_c \ell^- \bar{\nu}_\ell) (\%)$	$ V_{cb} \times 10^3$	$m_b^{\text{kin}} (\text{GeV})$	$\mu_\pi^2 (\text{GeV}^2)$
10.65 ± 0.16	42.46 ± 0.88	4.541 ± 0.023	0.414 ± 0.078



External constraints:

$$m_c = 0.986 \pm 0.013 \text{ GeV}$$

[Phys. Rev. D 80, 074010 (2009)]

$$\mu_G^2 = 0.35 \pm 0.07 \text{ GeV}^2$$

$$\rho_{LS}^3 = -0.15 \pm 0.10 \text{ GeV}^3$$

More details about the
fit procedure are in
[Phys.Rev.D89, 014022
(2014)]

クォーク・ハドロン双対性

[仮定] ハドロンに行く断面積をクォークで計算しても OK

- どれだけ正しいか？

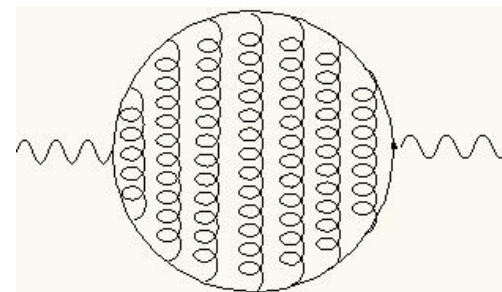
- 終状態の和とは

Poggio, Quinn, Weinberg, PRD13, 1958 (1976)

共鳴付近では高次がきく

- ある領域でぼやかしてみる

$$\begin{aligned}\bar{R}(s, \Delta) &\equiv \frac{\Delta}{\pi} \int_0^\infty ds' \frac{R(s')}{(s-s')^2 + \Delta^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty ds' R(s') \left(\frac{1}{s-s'+i\Delta} - \frac{1}{s-s'-i\Delta} \right) \\ &= \frac{1}{2i} [\Pi(s+i\Delta) - \Pi(s-i\Delta)]\end{aligned}$$



$$\text{Im}\Pi(s) \propto R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

共鳴を避けて摂動展開が収束するようになる。

クォーク・ハドロン双対性

[仮定] ハドロンに行く断面積をクォークで計算しても OK

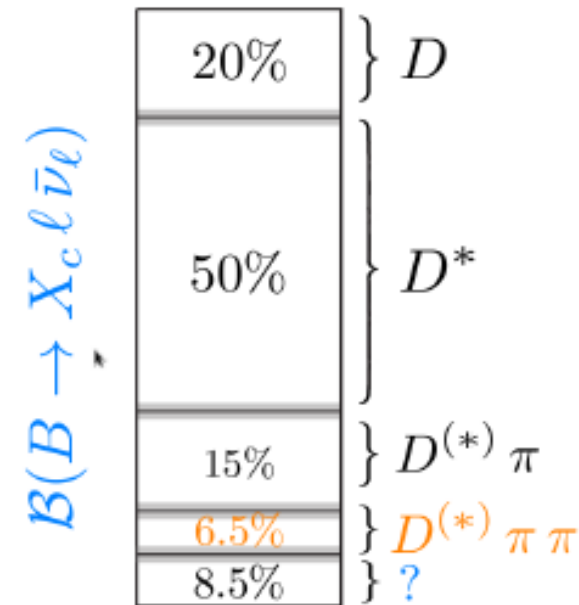
- 保証するには、できるだけぼやかすこと。

- 積分で定義される量。モーメントとか。
- やりすぎると危ない。

- $b \rightarrow c \ell \bar{\nu}$: そもそも危なくないか??

- いくらぼやかしても 2/3 は基底状態。
- 一応問題ない? 証明なし。

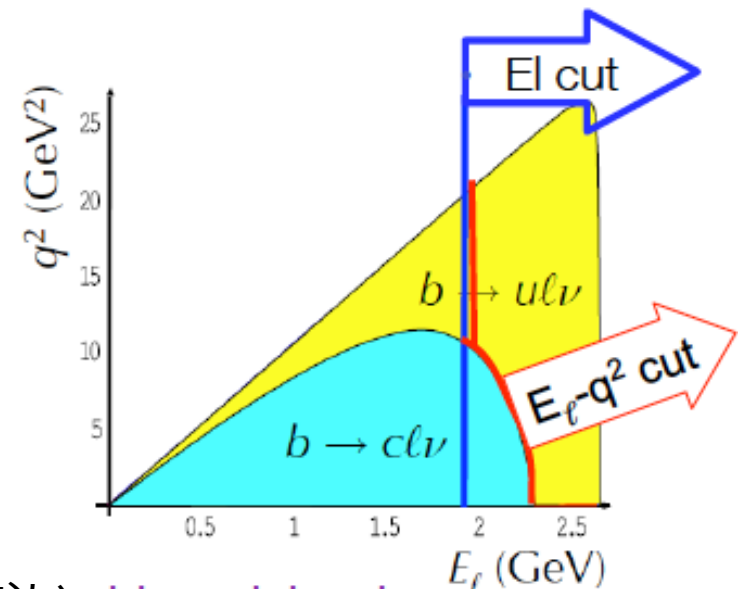
- ただし、どうやら excl の和では足りない....
なんで?



$b \rightarrow u \ell \nu$

こっちはクォーク・ハドロン双対性の問題はなさそう。
でも...

- c と u は区別できない。 c のほうが 100 倍多い。
- どこかで切る。
 - 同じ問題が復活 ...。



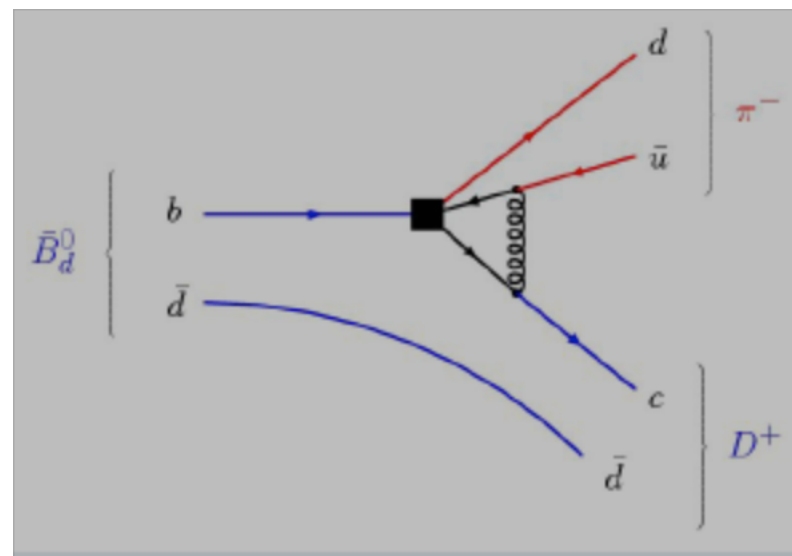
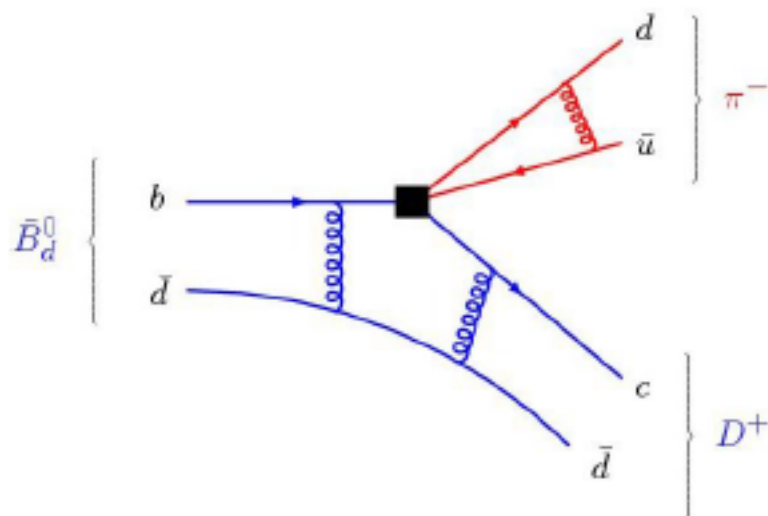
そういう訳で、インクルーシブも簡単ではない。...

(計算できる場合)

2.2 因子化

因子化 (factorization)

- 素朴にはこういうの。

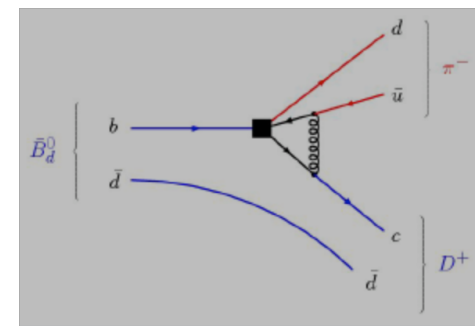
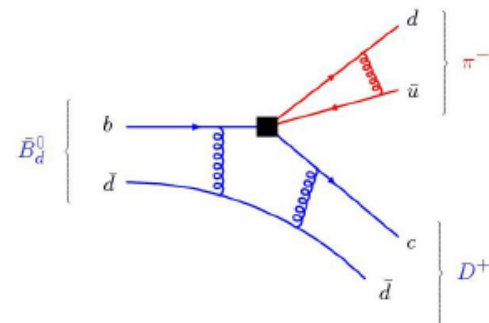


$$r_i = \underbrace{\langle D^+ | J_i^{(b \rightarrow c)} | \bar{B}_d^0 \rangle}_{\text{form factor}} \underbrace{\langle \pi^- | J_i^{(d \rightarrow u)} | 0 \rangle}_{\text{decay constant}}$$

- 形状因子を途中できって2つに分ける。両方にまたがるグルーオンは無視。

因子化 (factorization)

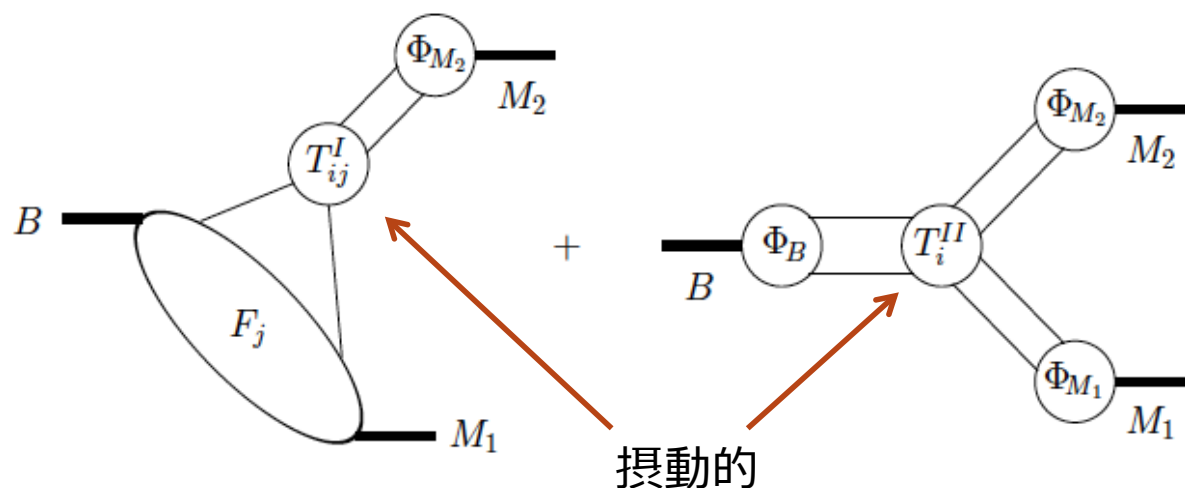
- なぜそれでよいか。
 - “色”透明化 = 飛び去っていくハドロンから見ると、片割れは透明。
あるいは双極子に見える。離れるとすぐに効かなくなる。
- だめな理由。
 - 4点演算子のスケール依存性が合わなくなる。
= 短距離で効くダイアグラムを無視したせい。
- どっちにしろもっとまともな理論が必要。



QCD 因子化

Beneke, Buchalla, Neubert, Sachrajda (2000)

- 摂動QCDで“系統的に”短距離と長距離の寄与を分離



$$\langle M_1 M_2 | \mathcal{O}_i | \bar{B} \rangle = \sum_j F_j^{B \rightarrow M_1}(m_2^2) \int_0^1 du T_{ij}^I(u) \Phi_{M_2}(u) + (M_1 \leftrightarrow M_2) \\ + \int_0^1 d\xi du dv T_i^{II}(\xi, u, v) \Phi_B(\xi) \Phi_{M_1}(v) \Phi_{M_2}(u)$$

QCD 因子化

Beneke, Buchalla, Neubert, Sachrajda (2000)

• ということかという...

形状因子 + 崩壊定数に吸収される部分



スケールによって2つに分離：摂動的 + 長距離($1/m_Q$ の寄与)



= $1/m_Q$ が無視できる範囲内では、系統的な分離が可能。

QCD 因子化

すばらしい。ただし、

- インプットが必要：
 - 崩壊定数(レプトニック)、形状因子 (セミレプトニック)
 - 光円錐分布関数
- 理論的制限：
 - $1/m_Q$ を無視する近似でしか証明できない。
 - $O(\alpha_s)$ までしか証明できない。

その後の理論的進展：

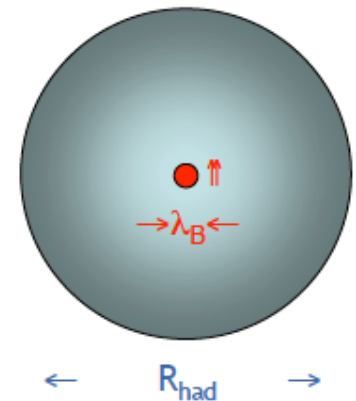
- Soft Collinear Effective Theory (SCET) : 有効理論 (ラグランジアン) の形で書き直した。

(計算できる場合)

2.3 重いクォークの対称性

ボトムクォークは重い

- QCD のスケール $\sim 300 \text{ MeV}$ と比べてずっと重い。
- B 中間子のイメージ
 - 真ん中に重い b クォーク
 - まわりに軽いクォークとグルーオン



- 非相対論的近似

$$h_v(x) = e^{im_Q v \cdot x} \frac{1 + \not{v}}{2} Q(x) \quad H_v(x) = e^{im_Q v \cdot x} \frac{1 - \not{v}}{2} Q(x)$$

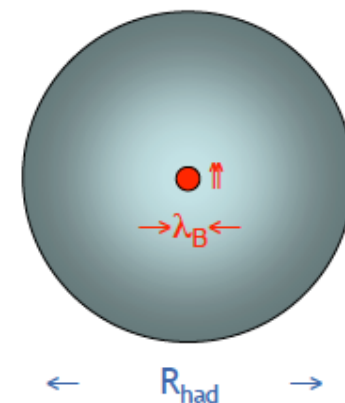
$$\mathcal{L}_{\text{HQET}} = \bar{h}_v i v \cdot D_s h_v + \frac{1}{2m_Q} \left[\bar{h}_v (i\vec{D}_s)^2 h_v + C_{\text{mag}}(\mu) \frac{g_s}{2} \bar{h}_v \sigma_{\mu\nu} G_s^{\mu\nu} h_v \right] + \dots$$

- ディラック方程式から、シュレーディンガー方程式+パウリ項へ

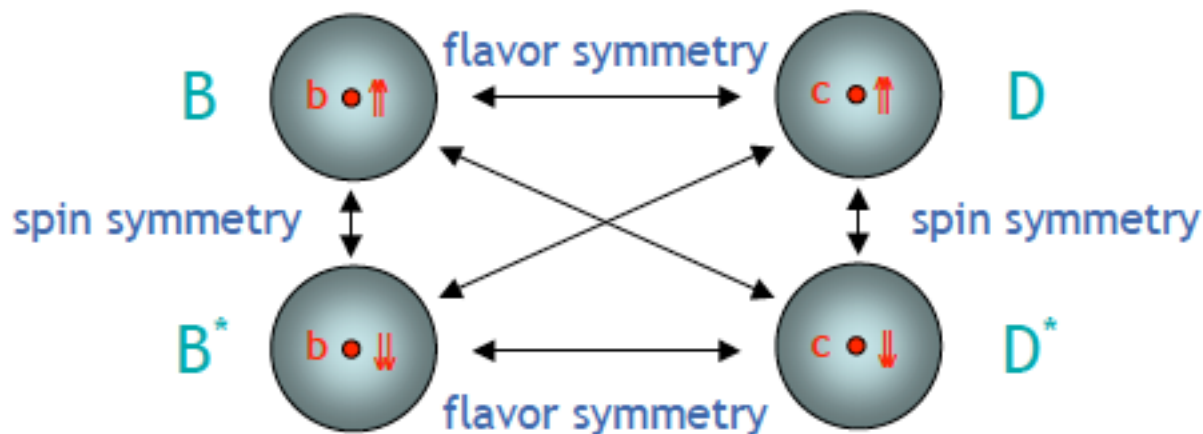
ボトムクォークは重い

2つの帰結：

- 重いものは重い。
 - チャームもボトムもたいして変わらない。
- スピンは効かなくなる。
 - パウリ項は $1/m_Q$



- 対称性



重いクォークの対称性

質量スペクトル：

- $b \Leftrightarrow c$ (バーはスピン平均)

$$\bar{m}_{B_s} - \bar{m}_{B_d} = 89 \text{ MeV} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{m}_{D_s} - \bar{m}_{D_d} = 71 \text{ MeV}$$

$$m_{\Lambda_b} - \bar{m}_{B_d} = 306 \text{ MeV} \quad \Leftrightarrow \quad m_{\Lambda_c} - \bar{m}_{D_d} = 315 \text{ MeV}$$

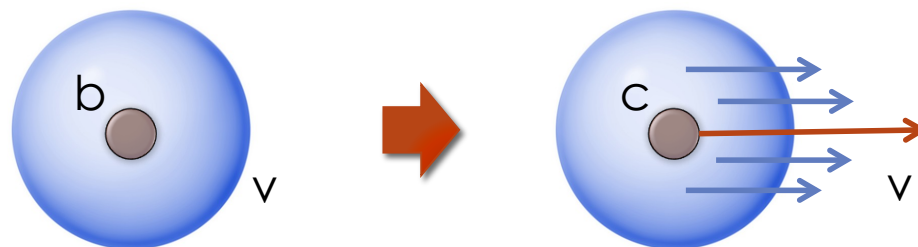
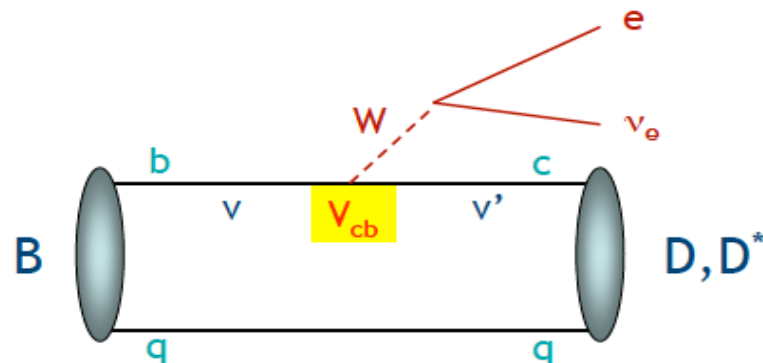
- $\uparrow \Leftrightarrow \downarrow$

- 超微細構造 $\sim 1/m_Q$

$$m_{B^*}^2 - m_B^2 = (700 \text{ MeV})^2 \quad \Leftrightarrow \quad m_{D^*}^2 - m_D^2 = (740 \text{ MeV})^2$$

形状因子

- セミレプトニック崩壊 $B \rightarrow D^*$
 - 真ん中の b クォークが突然 ...



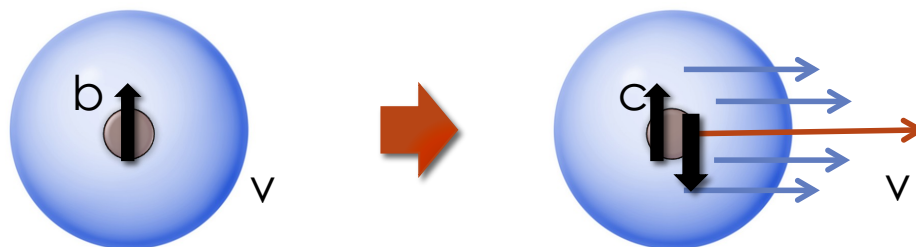
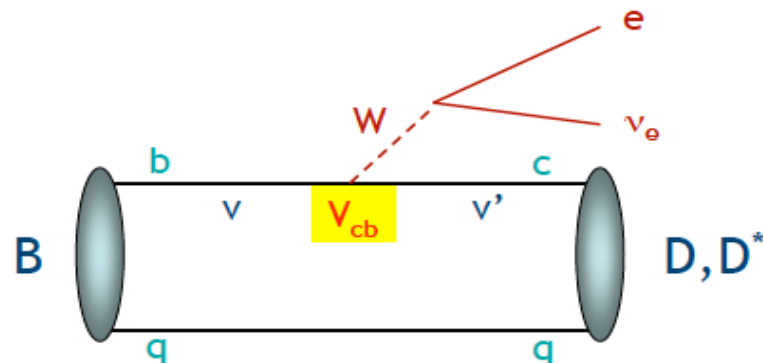
- 周りの軽いクォークにとっては、重いクォークの種類は区別できない。速度 v, v' だけが関係ある(ついていけないといけない)。
- 共通の形状因子

$$\langle P'(v') | \bar{Q}_{v'} \gamma^\mu Q_v | P(v) \rangle = \xi(v \cdot v') (v + v')^\mu$$

← Isgur-Wise 関数

形状因子

- セミレプトニック崩壊 $B \rightarrow D^*$
 - スピンの向きも。



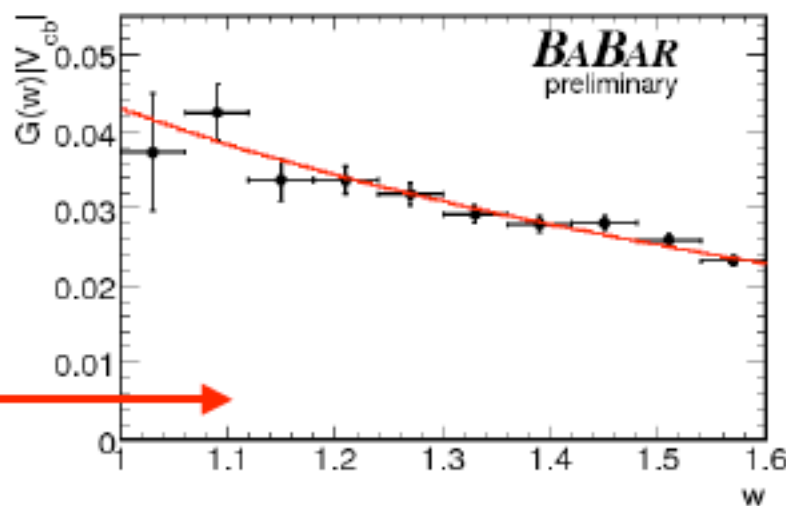
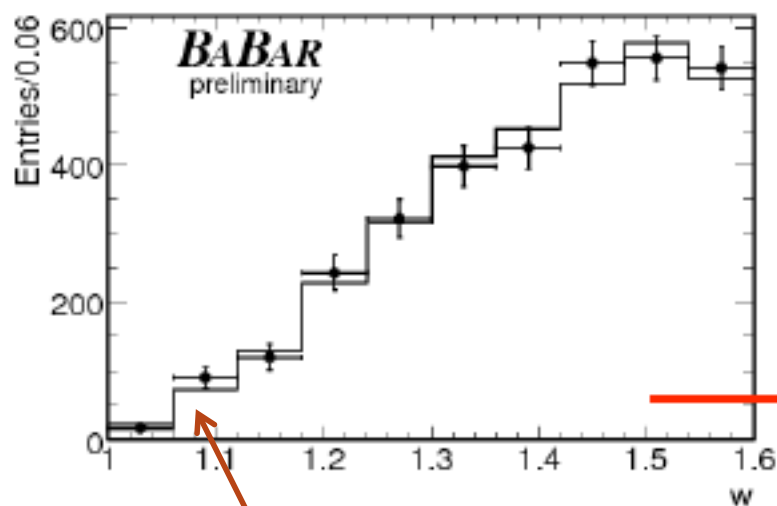
- 周りの軽いクォークには、重いクォークのスピンは区別できない。

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle D(v') | V^\mu | B(v) \rangle = h_+(w) (v + v')^\mu + h_-(w) (v - v')^\mu, \\ \langle D^*(v', \epsilon) | V^\mu | B(v) \rangle = i h_V(w) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_\nu^* v'_\alpha v_\beta, \\ \langle D^*(v', \epsilon) | A^\mu | B(v) \rangle = h_{A_1}(w) (w + 1) \epsilon^{*\mu} - [h_{A_2}(w) v^\mu + h_{A_3}(w) v'^\mu] \epsilon^* \cdot v. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} h_+(w) &= h_V(w) = h_{A_1}(w) = h_{A_3}(w) = \xi(w), \\ h_-(w) &= h_{A_2}(w) = 0. \end{aligned}$$

Isgur-Wise 関数

- しかも、 $\xi(v \cdot v' = 1) = 1$ であることが保証される。
 - 何も起こらなかったのと同じこと。
- この反跳ゼロの極限では形状因子の値がわかる！



反跳ゼロ付近：力学的因子 $(w^2 - 1)^{3/2}$ のせいでイベントは少ない。

$|V_{cb}|$ の決定

$$\frac{d\Gamma}{dw}(\overline{B} \rightarrow D^* \ell \overline{\nu}_\ell) = \frac{G_F^2}{48\pi^3} |V_{cb}|^2 m_{D^*}^3 (w^2 - 1)^{1/2} P(w) (\mathcal{F}(w))^2$$

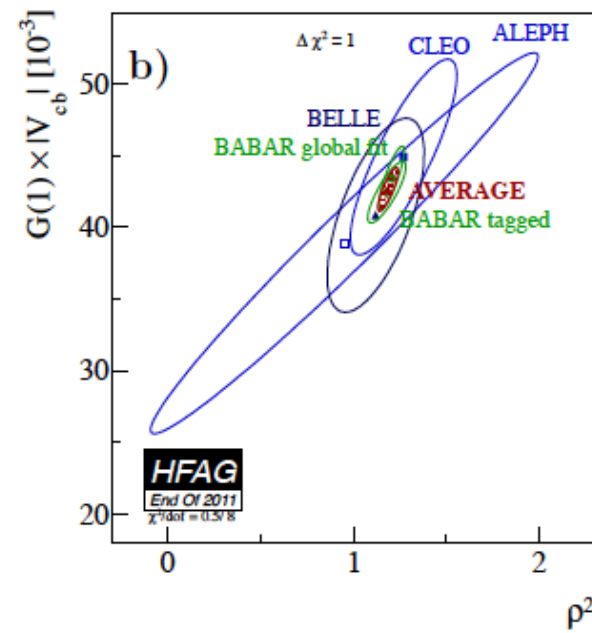
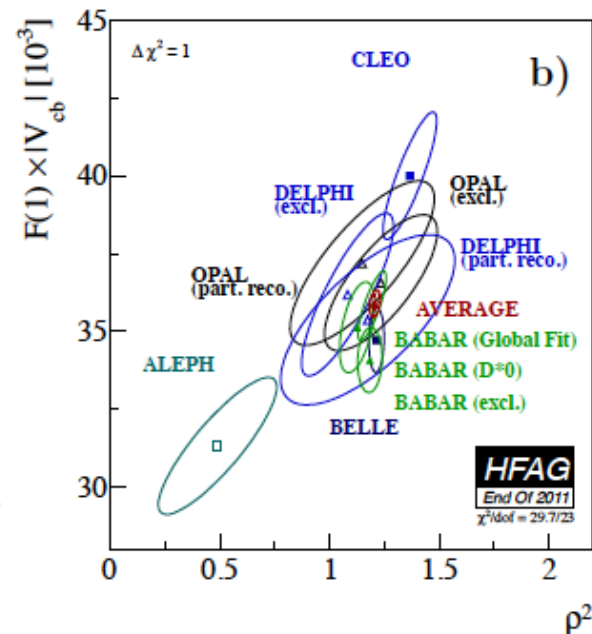
$$\frac{d\Gamma}{dw}(\overline{B} \rightarrow D \ell \overline{\nu}_\ell) = \frac{G_F^2}{48\pi^3} |V_{cb}|^2 (m_B + m_D)^2 m_D^3 (w^2 - 1)^{3/2} (\mathcal{G}(w))^2$$

$w \equiv v \cdot v'$

form factor

- $|V_{cb}|$ と $F(1)$ or $G(1)$ の積が実験で決まる。
 - ついでに形状因子の傾きも。
- 重いクォークの極限: $F(1) \sim G(1) \sim 1$

残る問題はそこからの補正。チャームは軽い！



$1/m_Q$ 補正

- 反跳ゼロの極限では $1/m_Q$ 補正が消える。

$$\langle D(v) | \bar{c} \gamma^\mu b | B(v) \rangle = 2\eta_V v^\mu \left[1 - \ell_P \left(\frac{1}{2m_c} - \frac{1}{2m_b} \right)^2 + \dots \right],$$

$$\langle D^*(v, \epsilon) | \bar{c} \gamma^\mu b | B^*(v, \epsilon) \rangle = 2\eta_V v^\mu \left[1 - \ell_V \left(\frac{1}{2m_c} - \frac{1}{2m_b} \right)^2 + \dots \right].$$

- 始状態 $\Leftrightarrow$ 終状態の対称性から。
- 最初の補正は $1/m_c^2$ 。この評価が理論の仕事。
 - 格子QCD計算では ...

(計算できる場合)

2.4 軽いクォークの対称性

アイソスピン

- 核子：陽子 $m_p = 938.3 \text{ MeV}$, 中性子 $m_n = 939.6 \text{ MeV}$
 - 電荷を除くととても似ている。
 - クォークでは uud と udd で、QCD だけを考えてほとんど同じ。
 - $m_u \sim 2 \text{ MeV}$, $m_d \sim 5 \text{ MeV} \ll 300 \text{ MeV}$
- アイソスピン対称性: $u \Leftrightarrow d$
 - 入れ替えても QCD にかかわる性質は変わらない。
 - 核子は $I = \frac{1}{2}$ 二重項、パイ中間子は $I=1$ 三重項。
- $SU(3)$ ：ストレンジクォークまで含める。 $u \Leftrightarrow d \Leftrightarrow s$
 - $m_s \sim 100 \text{ MeV}$ なので近似はだいぶ悪くなる。でもそこそこ。

自発的対称性の破れ

- u, d, s クォーク質量 < 300 MeV
 - 自発的対称性の破れ $SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(3)_V$
 - パイ中間子 = 南部・ゴールドストーン粒子 (質量 ~ ゼロ)
- 有効理論 = カイラル摂動論

$$L_2 = \frac{f^2}{4} \text{Tr} \left(D_\mu U D^\mu U^\dagger \right) + \frac{f^2}{4} \text{Tr} \left(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right),$$

$$U = \exp \left(\frac{i \tau^a \pi^a}{f} \right), \chi = 2B_0 m$$


$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8 \end{pmatrix}$$

- パイ中間子に働く力是对称性で制限される。

カイラル摂動論

- 運動量（とパイ中間子質量）に関して展開

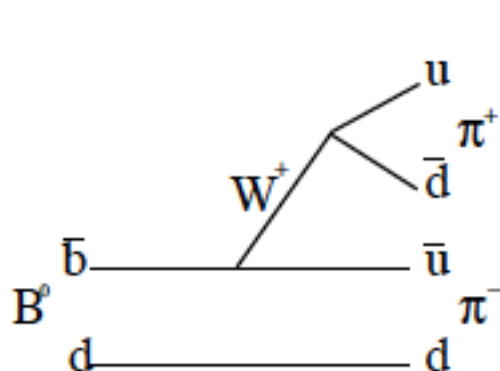
$$L_2 = \frac{1}{2} \partial_\mu \pi^a \partial^\mu \pi^a - \frac{m_\pi^2}{2} \pi^a \pi^a + \frac{m_\pi^2}{24 f^2} (\pi^a \pi^a)^2 \\ + \frac{1}{6 f^2} [(\pi^a \partial_\mu \pi^a)(\pi^b \partial^\mu \pi^b) - (\pi^a \pi^a)(\partial_\mu \pi^b \partial^\mu \pi^b)] + \dots$$

- 微分結合になっている。
 - ループ積分をやると、この展開の高次が出る。
 - 運動量の次数による系統的な展開が可能 = カイラル摂動論。
 - 高次では余分なパラメタが増える。LO では2個。NLO では10個。
-
- ソフトなパイ中間子が出てくる過程では適用可能。
 - それ以外でも、アイソスピン対称性は使える場合あり。

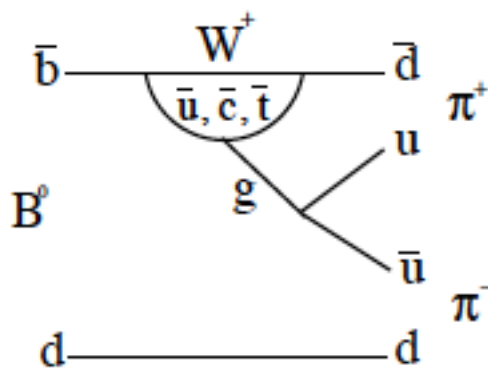
アイソスピン関係式

• $B \rightarrow \pi\pi$ 崩壊における CP の破れ

Gronau, London (1990)



tree: $V_{ud} V_{ub}^*$



penguin $V_{td} V_{tb}^*$

tree だけでできていたら ϕ_2 の決定に使える。
penguin は 1/3 程度の大きさ。

• 対称性を使ってアイソスピンで分類。各成分を決める。

$$A(B^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) = \sqrt{2}(A_2 - A_0),$$

$$A(B^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) = 2A_2 + A_0,$$

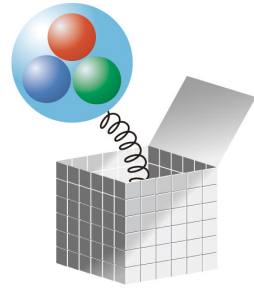
$$A(B^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) = 3A_2.$$

中間まとめ

- QCD はやっかい。でもいろんな方法がある。
 - 摂動とか
 - 対称性とか

でもまあ「うまくいく場合がある」という程度。どれもちゃんと非摂動計算をしたわけではない。

- 限界を知った上で使おう。
- 後半は 格子QCD の話。
 - ほんとに計算するというのはどういうことか。

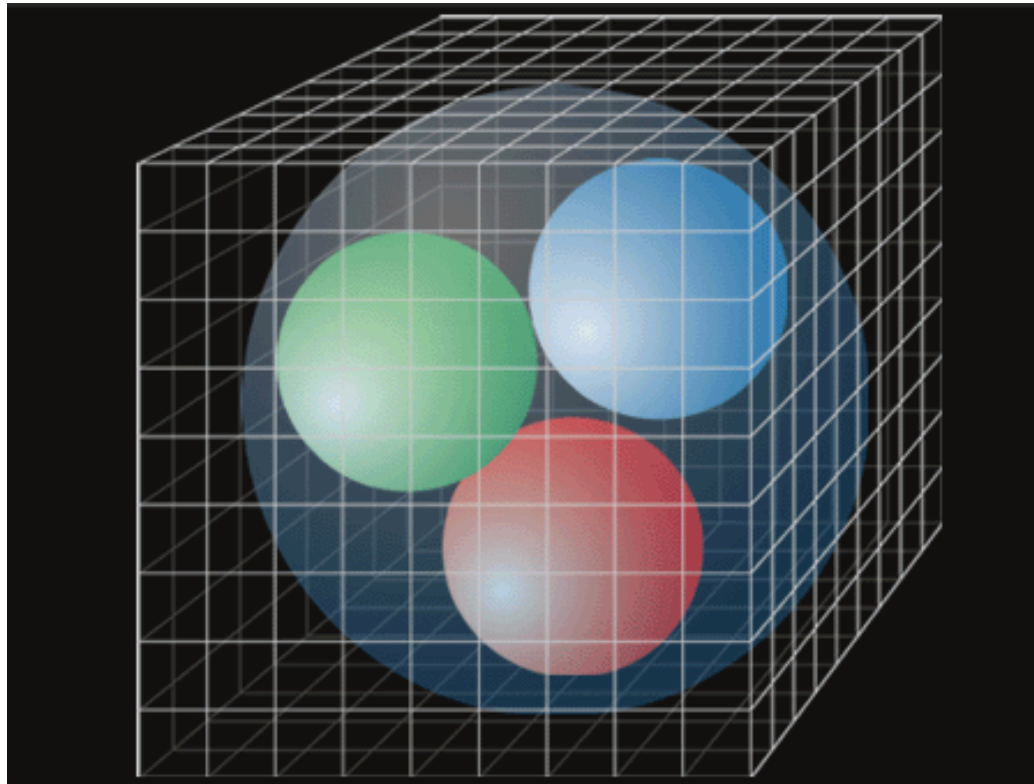


格子QCD計算とは何か？

@ Flavor Physics Workshop 2014 (浜名湖)

高エネルギー加速器研究機構 & 総合研究大学院大学
橋本省二
平成26年12月10日

こういうもの？



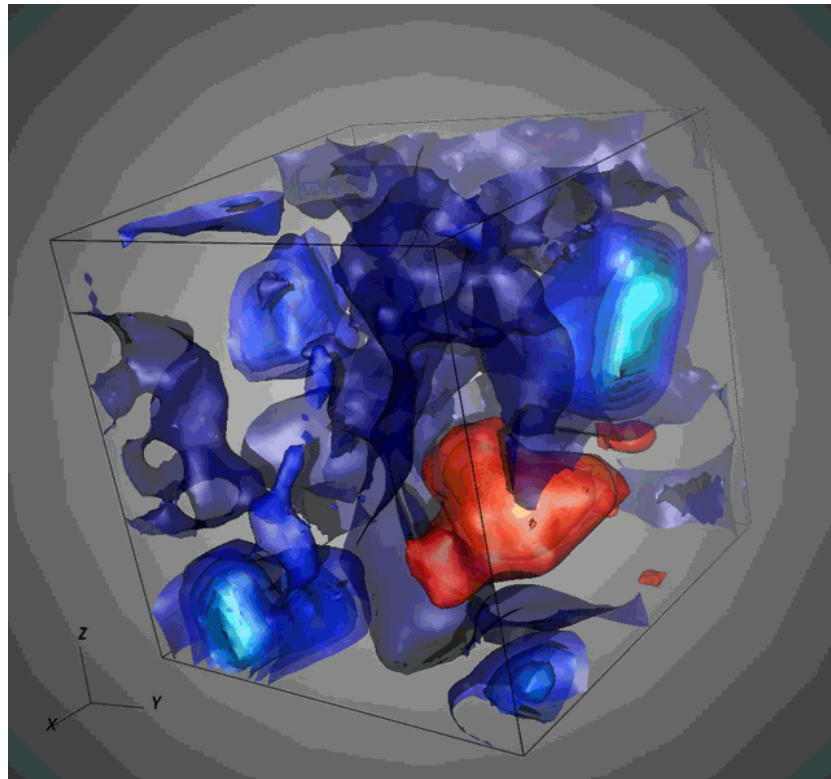
ぜんぜん違う

- これから理解すべきこと：

量子色力学(QCD)は場の量子論

- つぶつぶのクォークがびゅんびゅん飛んだりはしない。

どっちかと言うとこんな感じ



もくじ

1. 量子力学から場の量子論へ
 - 理論を解くとはどういうことか？
2. 格子QCDシミュレーション
 - 格子QCDとはどんな理論か？
 - どうやって計算するのか？
3. どんなことがわかる？
 - 真空の様子：自発的対称性の破れ
 - 質量スペクトル
 - ...

1. 量子力学から場の量子論へ

何がそんなに難しいのか？

- 量子色力学（強い力の基礎理論）はこれだけ。

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi} (\not{D} + m) \psi \right\} \quad \begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\ D_\mu &= \partial_\mu - ig T^a A_\mu^a \end{aligned}$$

- 見た目は量子電磁気学とそんなに違わない。クォークの散乱とか計算できそう。もうちょっとがんばったら？
- そういえば陽子とか中間子とかはどこ？

理論を解くというのはどういうことだったか、おさらい。

量子力学

- 1 個の電子の“場”が従う方程式

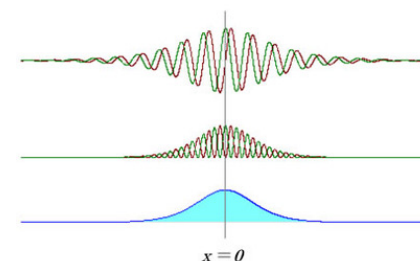
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}, t)$$

- 固有値と固有ベクトル = 1 個の電子がもつエネルギーと波動関数の候補
- 特別な場合（調和振動子、水素原子...）には特殊関数で書ける。
- そうでない場合も、基本的には大規模行列の固有値問題。
- 2 個、3 個になっても（反对称化とかあるけど）基本的な論理は同じ。
 - な～んだ、簡単じゃん。とか言うてはいけない。4 個、5 個と増えるとどんどん大変になる。

量子力学から場の量子論へ

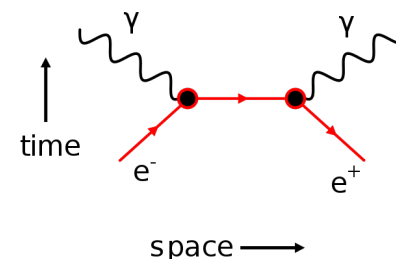
• 量子力学の対象

- 電子の波動関数。電子 = 空間全体に広がる波。
- “場”と呼んでもよい。電磁“場”と同様。
- 電子は生まれたり消えたりしないで、常にどこかにある。粒子の生成と消滅を考えたかったら...



• 場の量子論の対象

- 電子の波動関数全体が生まれたり消えたりできる。
- 固体物理での電子・ホールも同じこと。実際の電子は消えないけど、フェルミ面を基準に考えると電子とホールの対で生成消滅できる。
- “波動関数”の概念の拡張。



場の量子論の作り方

(自由場の場合)

- 時空のすべての点に“場”の自由度がある。
 - 隣の点と相互作用があって独立ではないので、フーリエ変換して運動量空間で見てみる。

$$\psi(x) = \sum_p \left[a_p e^{ipx} + a_p^\dagger e^{-ipx} \right]$$

- a_p と $a_p^\dagger$ は調和振動子と同様の交換関係を満たすことにする。

$$[a_p, a_p^\dagger] = 1$$

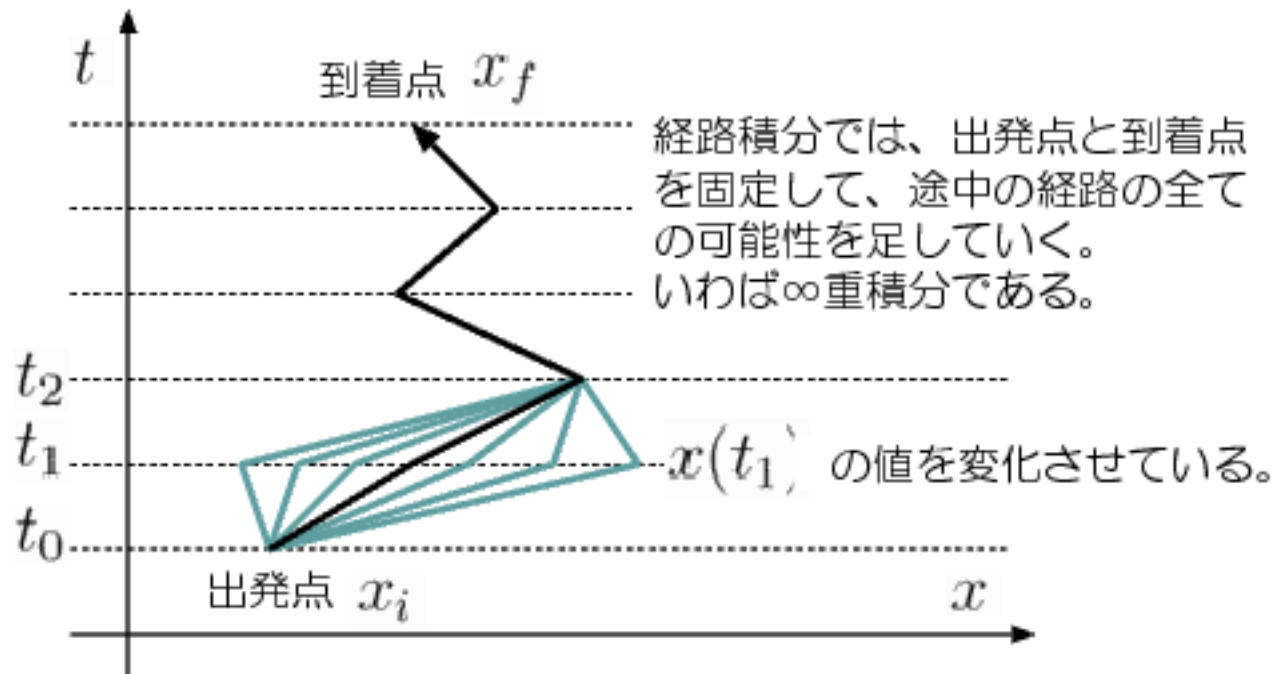
第二量子化

- すると、振幅 a の取る値は $1, 2, 3, \dots$ と数えられる。

= “粒子”

経路積分

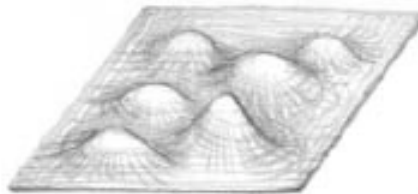
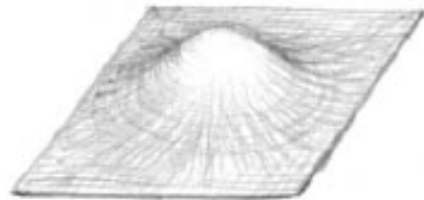
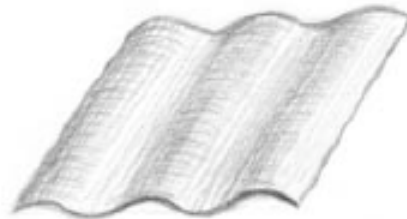
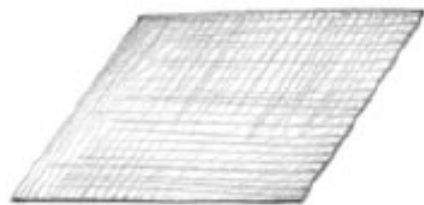
- 同じことを「経路積分」の言葉で書くこともできる。
 - この操作で、シュレーディンガー方程式と同じ解が得られる（量子力学）



$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x_i, x_f)\right)$$

場の理論での“経路積分”

- 経路ではなく場の配位に関する積分
 - あれもこれも全部。



$$Z = \int [d\phi] e^{iS}; \quad S = \int d^4x \mathcal{L}$$

- あとはラグランジアンを指定して計算する。

そうか。積分するだけね。

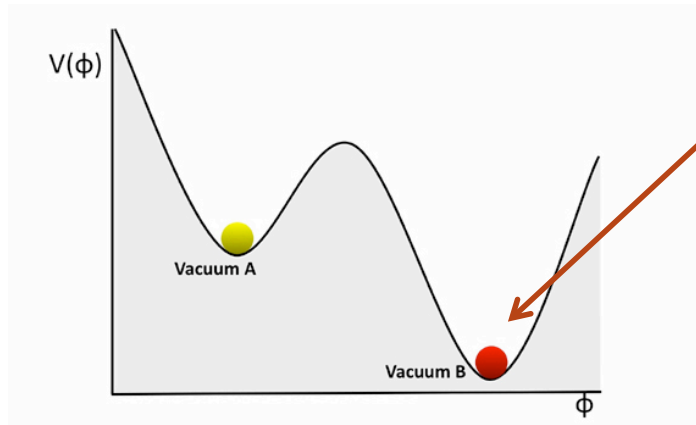
- だけど、普通は経路積分なんて計算できない。
 - 超多重積分：

$$Z = \int [d\phi] e^{iS}; \quad S = \int d^4x \mathcal{L}$$

- 唯一、まともに何かできるのはガウス積分に帰着できるとき。
 - 自由場の理論： $S \sim \phi^2$
 - 相互作用があるときは、自由場の理論をもとにした展開を考える。
= 摂動論
 - 展開のベースが現実に近いければ、これがよい近似になる。

摂動展開 = 調和振動子 + ...

- テイラー展開
 - たいていの系はある極限でこうなる。



$$\sim \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right), \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

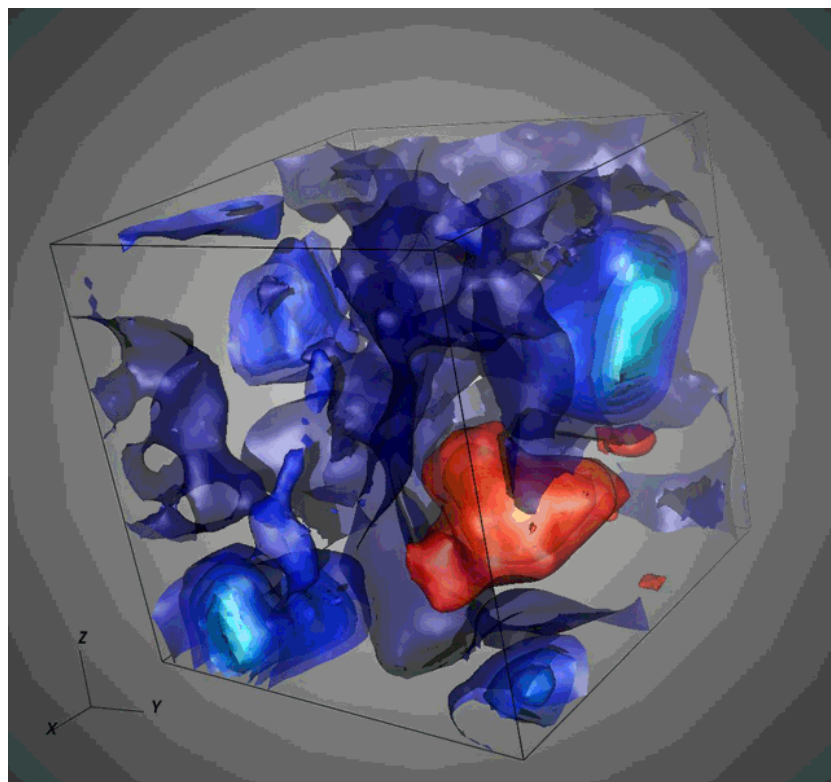
どこら辺まで振れるかという問題。

真空とはどんなものか？

- QED
 - 場の値がゼロになるときが真空。
 - そこからの励起が“粒子”に相当する。
 - QCD
 - 自由エネルギー（場の理論の言葉では有効作用）が最低になるところでは量子ゆらぎが勝ってランダムに近い。でも完全にランダムでもない。
-
- 場の量子論 $Z = \int [d\phi] e^{iS}; S = \int d^4x \mathcal{L}$
 - 統計モデル $Z = \int [d\phi] e^{-H/T}; H \sim \int d^3x \mathcal{L}$
-
- そこからの励起が“粒子”に相当する。本当はそれに興味がある。でも、さっきの「交換関係」みたいな簡単な話にはもはやならない。

量子色力学の真空

- こんな感じ



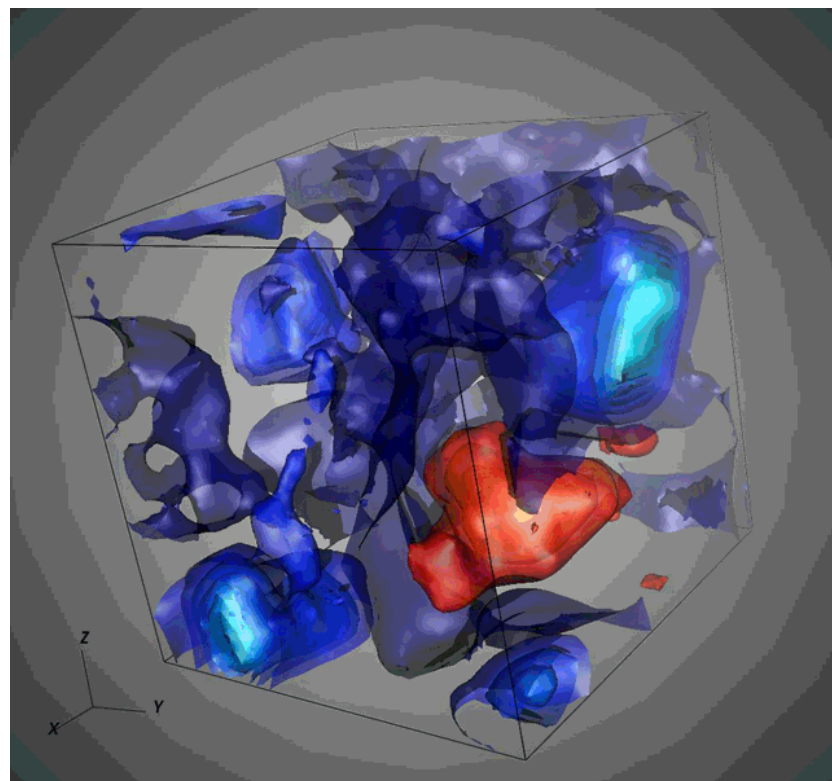
2. 格子QCDシミュレーション

とっても強い力

摂動的にわかるところはよい。
でも低エネルギーでは...

- 真空すら変えちゃう。カイラル対称性の破れ。それがこれ。

- 赤と青は凝縮したクォークのカイラリティ。
- こういうのがいるおかげで真空が対称性を壊す。



(もう一度) ラグランジアン

$$Z = \int [dA_\mu][d\psi][d\bar{\psi}] e^{iS}; S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(\not{D} + m)\psi \right\}$$

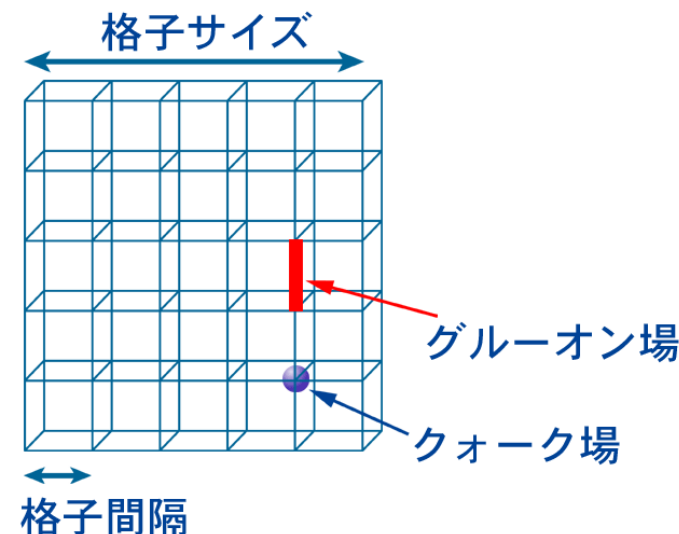
$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig T^a A_\mu^a$$

- 当面、理解する必要はない。覚えておくべきこと：
 - 3成分のクォーク場
 - 3 x 3 行列のゲージ場
 - 作用は、 A^2 だけでなく、 A^3 , A^4 も含む。単純な調和振動子にはならない。

格子上の理論

- 4次元立方格子
 - 場の変数は格子点上のみに定義する。
 - 格子間隔をゼロにする極限（連続極限）に行けば、望みのQCDになる。
 - 場の理論というのは、そもそもそういうもの。発散するので規格化しておかないと定義できない。あとで紫外切断を無限大にする。それと同じ。
- 摂動計算に依存しない定義
 - 普通の次元正則化は摂動計算することを前提とした定義。格子は非摂動領域も含めて使える完全な“定義”



単に計算の便宜上持ち出したものではなく、場の理論の正しい定式化。

格子上の理論

- 鍵はゲージ対称性
 - 空間の任意の点で別々のSU(3)回転を考える。
 - ラグランジアンが不変になるようにつじつま合わせの場を導入（ゲージ場）。

$$\bar{\psi}(x) \quad \psi(x + \hat{\mu})$$

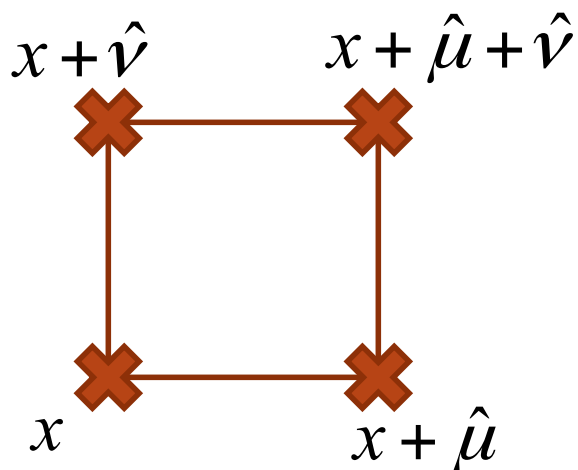
$$\bar{\psi}(x)V^\dagger(x) \quad V(x)U_\mu(x)V^\dagger(x + \hat{\mu}) \quad V(x + \hat{\mu})\psi(x + \hat{\mu})$$

$$U_\mu(x) = \exp \left[i g a A_\mu(x) \right] = 1 + i g a A_\mu(x) + \dots$$

$$A_\mu(x) \rightarrow V(x) \left[A_\mu(x) + \frac{i}{g} \partial_\mu \right] V^\dagger(x)$$

ゲージ場

- ゲージリンク $U_\mu(x)$
 - ユニタリー行列 $SU(3)$
 - つなげておくとゲージ不変になる。



$$\begin{aligned}
 & \text{Tr} \left[U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x) \right] \\
 & \approx \text{Tr} \left[e^{igaA_\mu} e^{iga(A_\nu + a\partial_\mu A_\nu)} e^{-iga(A_\mu + a\partial_\nu A_\mu)} e^{-igaA_\nu} \right] \\
 & \approx \text{Tr} \left[e^{iga^2(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - g^2 a^2 [A_\mu, A_\nu]} \right] = \text{Tr} \left[e^{iga^2 F_{\mu\nu}} \right] \\
 & = \text{Tr}[1] - \frac{1}{2} g^2 a^4 \text{Tr} [F_{\mu\nu}^2] + \dots
 \end{aligned}$$

ゲージ理論のラグランジアン

ゲージ作用

- 連続極限 $a \rightarrow 0$ では通常のものに戻る。

$$\begin{aligned} S &= \frac{6}{g^2} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{3} \text{Re Tr} \left[U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x) \right] \right] \\ &\rightarrow a^4 \sum_x \sum_{\mu < \nu} \text{Re Tr} \left[F_{\mu\nu}^2 \right] \\ &= \int d^4x \frac{1}{4} \left(F_{\mu\nu}^a \right)^2 \end{aligned}$$

- 唯一ではない。より速く連続極限に近づくものを考えてもよい。
- 結合定数: $\beta = 6/g^2$
 - 統計モデルでは $1/kT$ に相当。 $\beta=0$ は高温極限。

経路積分

作用（ラグランジアン）が決まったら、あとは経路積分。

- A の代わりに U

$$\begin{aligned} Z &= \int [dU_\mu][d\psi][d\bar{\psi}] e^{-S_g - \int d^4x \bar{\psi}(D[U]+m)\psi} \\ &= \int [dU_\mu] \det(D[U]+m) e^{-S_g} \end{aligned}$$

- $U = \exp(iagA) \sim 1 + iagA + \dots$
 - $a \sim 0$ か $g \sim 0$ では連続理論に戻る。
- フェルミオン部分はグラスマン積分。積分すると行列式を与える。

こういう多重積分が出てきたらモンテカルロ法の出番。
もっとも重要そうな配位だけを取り出して代表させる。

問題はフェルミオン

- 理論定式化としても面倒
 - カイラル対称性、ダブリング、... : 全部割愛。
- 計算上もとても大変。
 - 大規模行列の行列式。全固有値を求めるのと同等 ($\sim N^3$)。

$$\det(D[U] + m) = \prod_k (m + i\lambda_k[U])$$

1. 背景ゲージ場 U の上でディラック演算子の固有値を求める。
2. 固有値の積によって経路積分での重みが決まる。
3. モンテカルロ法の原理にしたがって背景ゲージ場を少し変えてみる。
4. また固有値を計算。この繰り返し。

これは全然無理。

クォークを含むシミュレーション

- 実際には固有値計算はあまりに大変。補助場を使って書き換える。

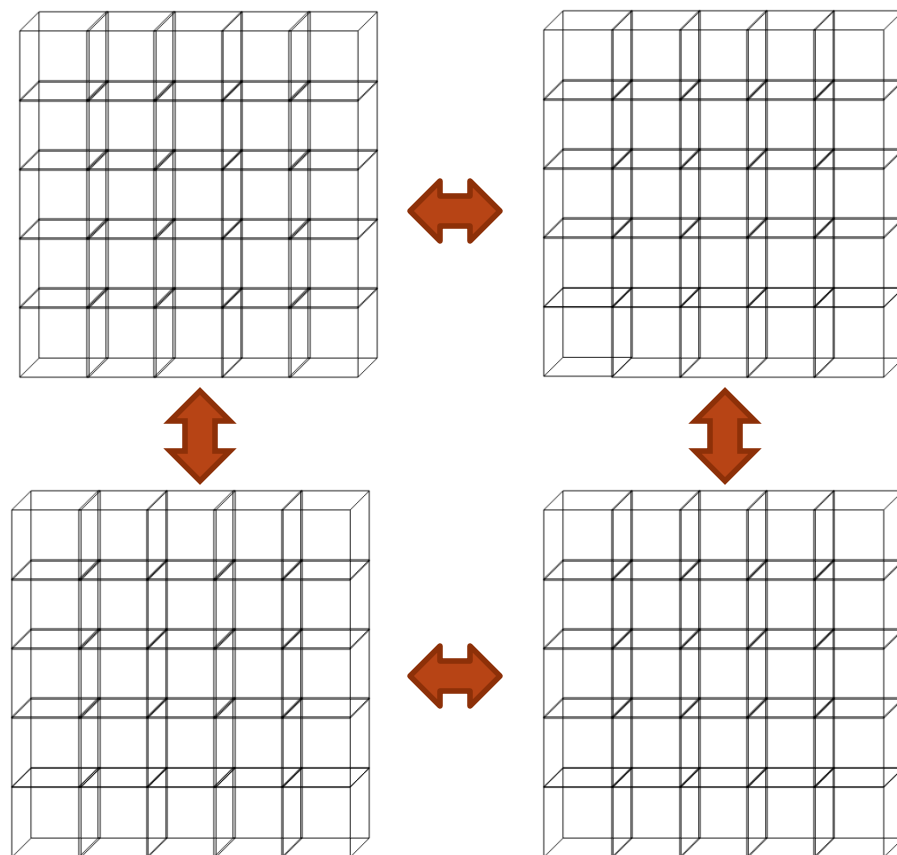
$$\begin{aligned} Z &= \int [dU] \det(D[U] + m)^2 e^{-S_g} \\ &= \int [dU][d\phi] e^{-S_g - \phi^\dagger (D[U] + m)^{-2} \phi} = \int [dU][d\phi] e^{-S_g - |(D[U] + m)^{-1} \phi|^2} \end{aligned}$$

- 固有値問題を逆行列の問題に帰着。これでも大変だけどだいぶまし。
- QCDのシミュレーションというのは、要はいつも逆行列の計算をやっている。

ここから先は詳細になるので割愛。

大規模計算

- 要はディラック演算子のかけ算。
 - 微分を差分に置き換えたものなので、基本は最近接相互作用。
 - 隣の格子点の場の値をもってきて差をとる。
- 並列化は自然
 - 各ノードの担当部分を決めて、
 - 必要に応じて端の部分のデータを通信



スーパーコンピュータ

- 「京」
 - 10ペタフロップス --- 元世界最速スパコン
 - 理化学研究所・計算科学研究機構
(神戸ポートアイランド)



KEK のスパコン

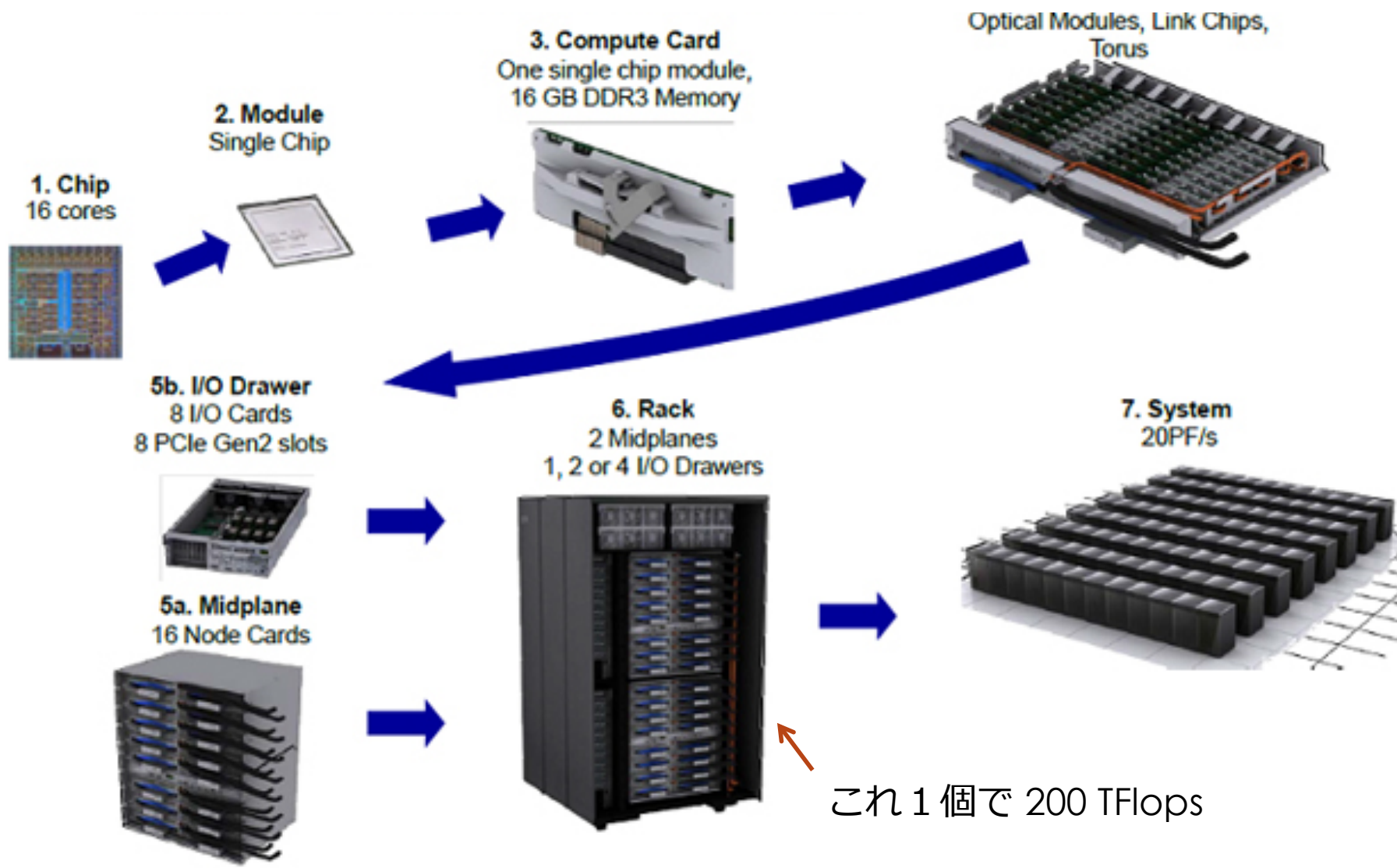
日立 SR16000 M1



IBM Blue Gene/Q



Blue Gene/Q



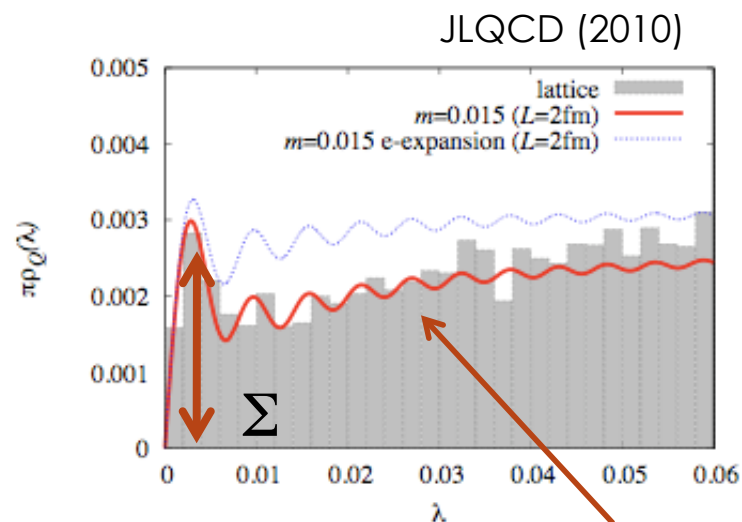
3. どんなことがわかる？

真空の様子

- 真空中のフェルミオン固有モード

$$\det(D[U] + m) = \prod_k (m + i\lambda_k[U])$$

- 真空中の“典型的な”クォーク・反クォーク対の様子。
- 固有値分布スペクトルが、真空中のカイラル凝縮の情報を与える。



Banks-Casher (1980)

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{V} \sum_k \langle \delta(\lambda - \lambda_k) \rangle,$$



$$\lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \rho(\lambda = 0) = \frac{\Sigma}{\pi}$$

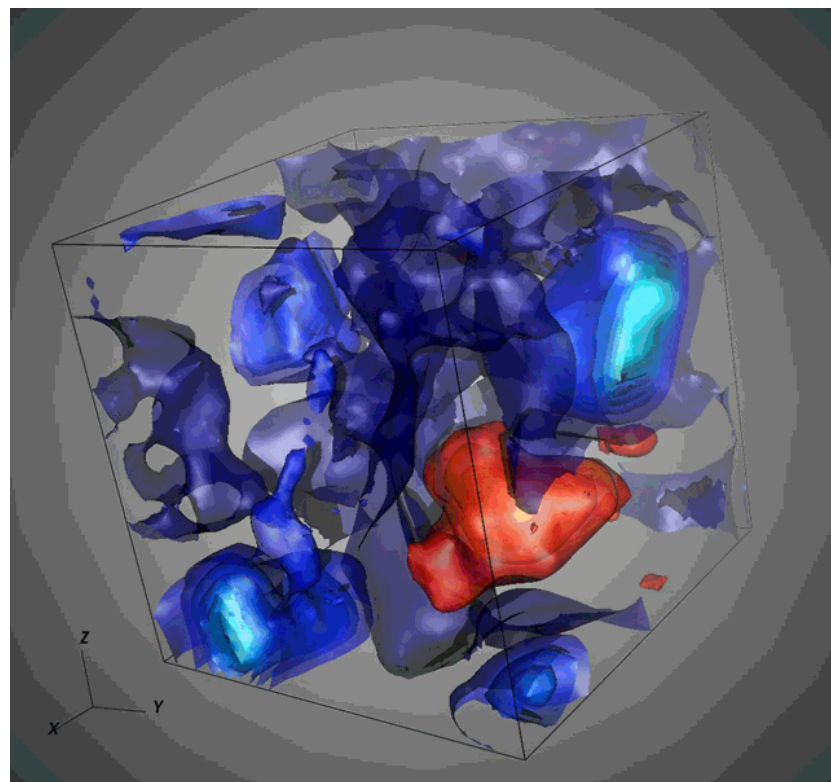
$$\Sigma \equiv -\langle \bar{q}q \rangle = \frac{1}{V} \sum_k \left\langle \frac{1}{m + i\lambda_k} \right\rangle$$

有限のカイラル凝縮 =
自発的カイラル対称性の破れの直接計算。

固有モードを見てみると...

- 低エネルギーモード
 - カイラル（右or左）
 - 局在しているっぽい。
- ただしこれがそのまま物理量ではないので注意。
- なんで摂動計算できないかわかるでしょ。こんなにぐちゃぐちゃ。

JLQCD (2011)



真空上の励起 = 素粒子スペクトル

- 中間子と重粒子のスペクトル

- 格子QCDの開始当初からの目標 ...

- 格子ゲージ理論の始まり: K.G. Wilson (1974)

- ゲージ理論を格子上に定義して強結合での計算を可能にする。

- 繰り込み群: 無限自由度の場の量子論の意味が明確になった。

- 数値シミュレーション。M. Creutz (1980)

- 最初の数値シミュレーション。強結合展開で見つかったクォークの閉じ込めは、弱結合（連続極限の近く）でも正しそう。

- 格子計算へのインプットは

- 1. 全体のスケール（あるいは結合定数）

- 2. 個々のクォーク質量

- これだけ。他はすべて予言。

質量、崩壊定数...

- 2点関数

$$C_{XY}(t; \vec{p}) = \sum_{\vec{x}} \langle O_X(t, \vec{x}) O_Y^\dagger(0) \rangle e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}.$$

- 状態の完全系で展開

$$C_{XY}(t; \vec{p}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2E_i(\vec{p})} \langle 0 | O_X(0) | H_i(\vec{p}) \rangle \langle H_i(\vec{p}) | O_Y^\dagger(0) | 0 \rangle e^{-E_i(\vec{p})t}$$

- 十分離れたところでみる

$$C_{XY}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2E_0(\vec{p})} \langle 0 | O_X(0) | H_0(\vec{p}) \rangle \langle H_0(\vec{p}) | O_Y^\dagger(0) | 0 \rangle e^{-E_0(\vec{p})t}$$

↑
演算子の行列要素

↑
基底状態の質量

2点関数

- 同じもの

$$C_{XY}(t; \vec{p}) = \sum_{\vec{x}} \langle O_X(t, \vec{x}) O_Y^\dagger(0) \rangle e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}.$$

- クォーク・プロパゲータの積で書かれる。

$$\langle O_\Gamma(x) O_{\Gamma'}^\dagger(y) \rangle = \langle \text{Tr} \left[\Gamma S(x, y; \{U\}) \Gamma' S(y, x; \{U\}) \right] \rangle$$

- ディラック演算子の逆行列

$$(D[U] + m)S(x, y; \{U\}) = \delta_{x,y}$$

- 与えられたゲージ場のもとで。さらにゲージ場に関する平均。

ここでも逆行列

$$Ax = b$$

- 反復法で解く。共役勾配法とか。JICFuS Wiki を見よ。

高性能計算の扉

検索



CG 法

<http://www.jicfus.jp/wiki/index.php?CG%20%E6%B3%95>

[トップ] [編集] [凍結] [差分] [バックアップ] [添付] [リロード] [新規] [一覧] [単語検索] [最終更新] [ヘルプ]

最新の20件

2013-08-14
JICFuSレポート
一覧

2013-07-05
線形方程式の解
法
最急降下法
最小残差法
1 線形方程式の
解法の選択

2013-06-25
CRS形式
Look-Back GMR
ES(m) 法
GMRES-DR(m);

1 線形方程式の解法の選択

2 参考文献および参考書の記述

線形方程式, $Ax = b$ >>> 実対称/複素エルミート, $A = A^H$ >>> 正定値 >>> CG 法

- 概要
- 導出
 - 2次関数最小化としての導出
 - 逐次最小化法
 - 最急降下法
 - 共役方向法
 - 共役勾配法
 - クリロフ部分空間法としての導出

形状因子

- 3点関数
 - 例えば、

$$C_{KV_\mu D}(t_x, t_y; \vec{p}) = \sum_{\vec{x}, \vec{y}} \langle O_K(t_x, \vec{x}) V_\mu(0) O_D^\dagger(t_y, \vec{y}) \rangle e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}$$

- 完全系を挿入

$$C_{KV_\mu D}(t_x, t_y; \vec{p}) = \sum_{i,j} \frac{1}{2m_{D_i} 2E_{K_j}(\vec{p})} e^{-m_{D_i} t_x - E_{K_j}(\vec{p}) |t_y|} \times$$

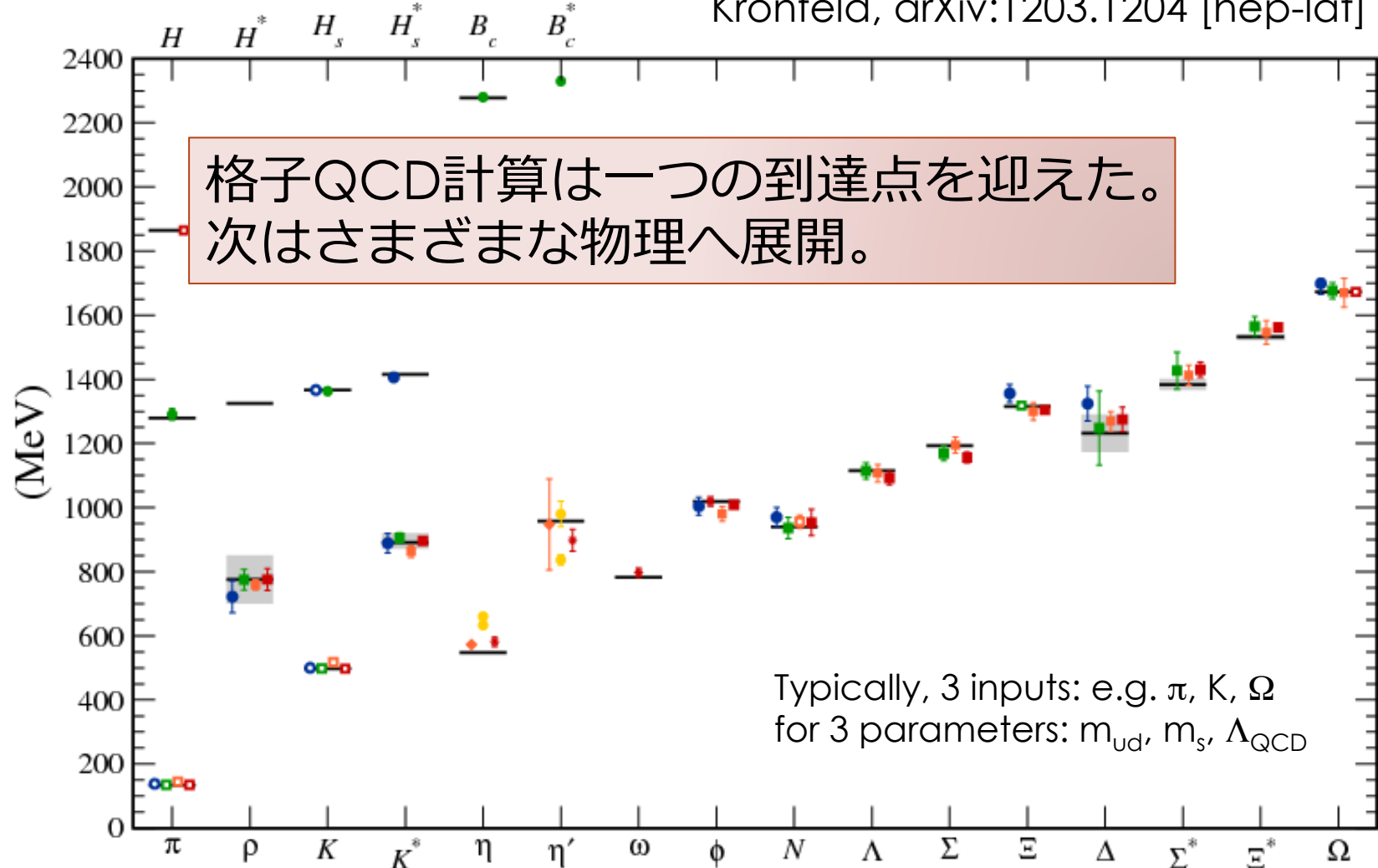
$$\times \langle 0 | O_K(t_x, \vec{x}) | K_i(\vec{p}) \rangle \langle K_i(\vec{p}) | V_\mu(0) | D_j(\vec{0}) \rangle \langle D_j(\vec{0}) | O_D^\dagger(0) | 0 \rangle$$

知りたい行列要素



ハドロン・スペクトル

Kronfeld, arXiv:1203.1204 [hep-lat]



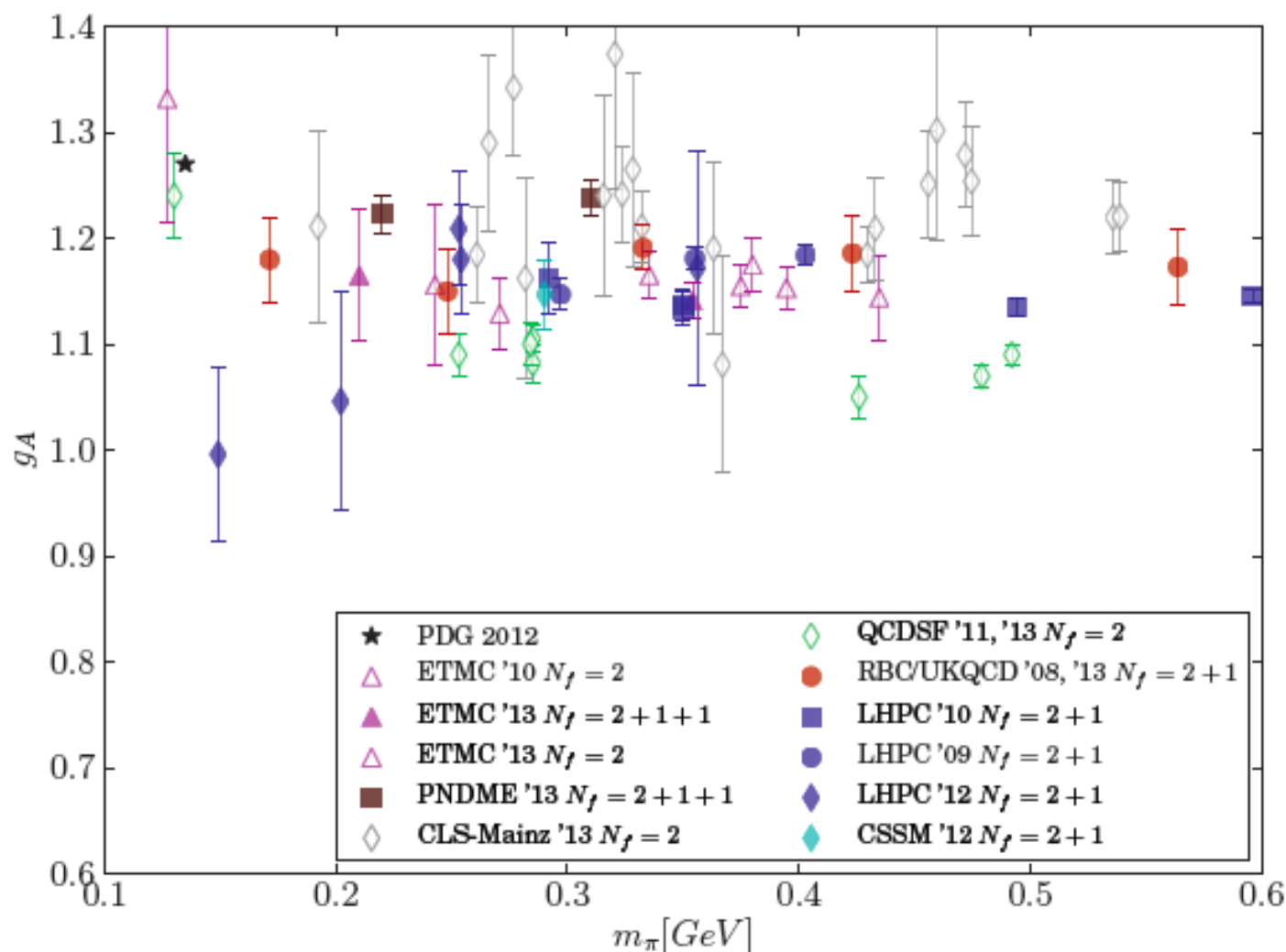
注意！

- 格子QCDなら何でも正しいのか。
 - 本来そういうつもりでやっている。場の量子論の定義にもとづいて計算。
- でも完全ではない。
 - 有限の格子間隔、格子体積、基底状態の同定、統計、クォーク質量。
- 気をつけて。いろんなところで「~~ずるして~~まちがって」いるかも。
 - 理論的枠組みは正しいか。解析の全ステップでチェックされているか。

陽子の軸性荷電

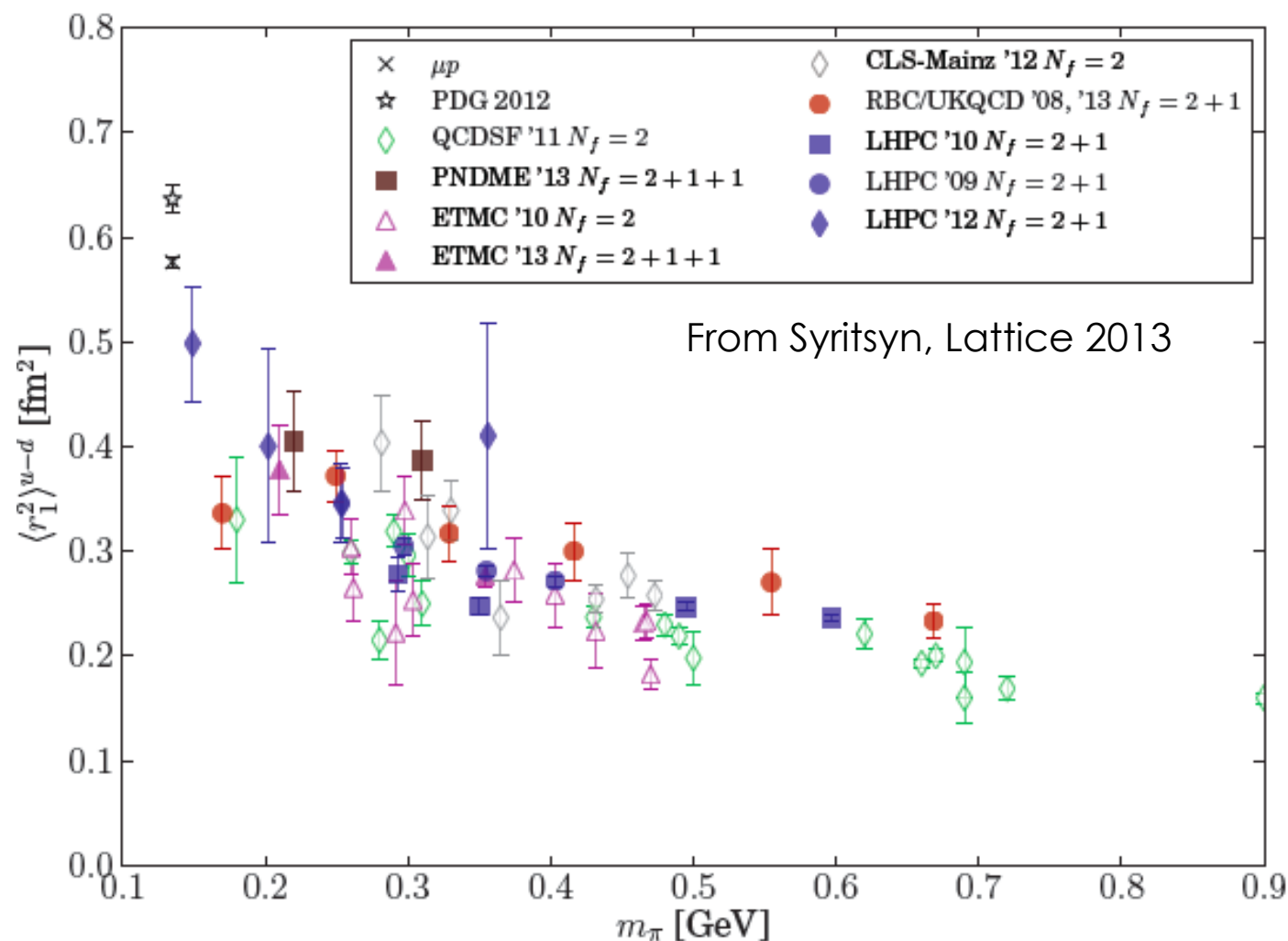
$$\langle N(p) | \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 q | N(p) \rangle = g_A \bar{u}_p \gamma^\mu \gamma^5 u_p$$

From Syritsyn, Lattice 2013



陽子の半径

$$F_1^{u-d}(Q^2) \approx F(0) \left[1 - \frac{1}{6} Q^2 \langle r_1^2 \rangle^{u-d} + \mathcal{O}(Q^4) \right]$$



じゃあ、どんなことを調べてみたい？

- 簡単な問題

- 基底状態の粒子の質量、崩壊定数
- 基底状態の粒子の弾性散乱の形状因子: パイ中間子形状因子、核子の荷電半径など。
- 基底状態から基底状態への遷移形状因子 $K \rightarrow \pi$ とか。

- 難しい問題

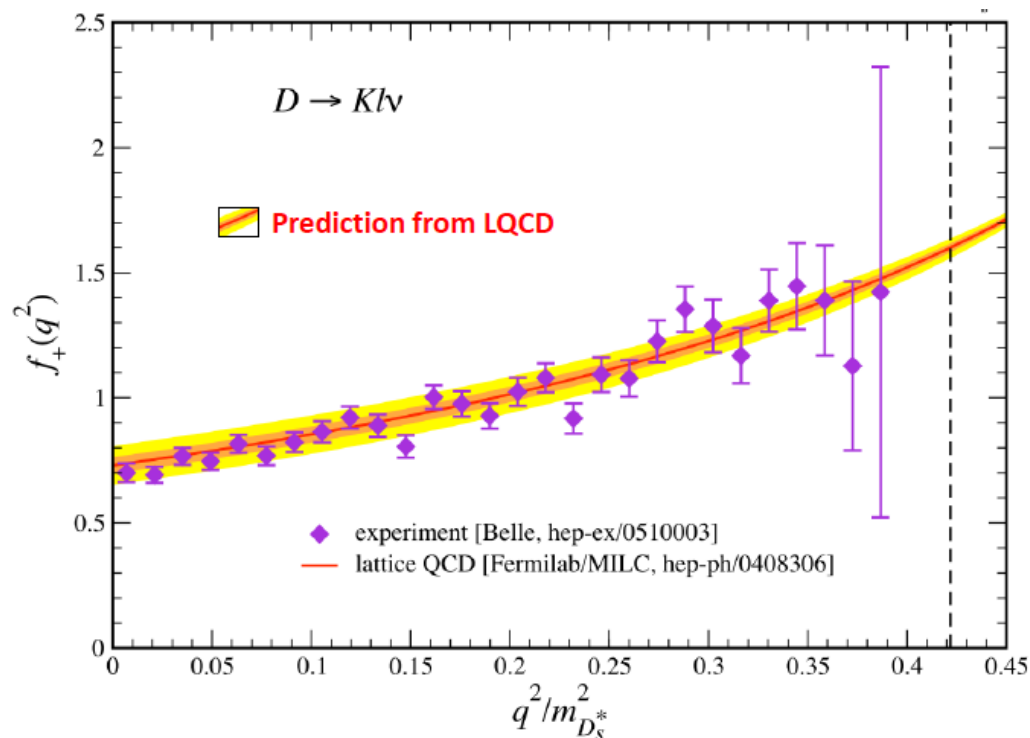
- 粒子の2体散乱: $\pi\pi$ 散乱にもいろいろ ($l=2,1,0$)
- 励起状態のエネルギー
- 2体の非弾性散乱。よく言われるエギゾチックはこういうのが多い。

- 他の理論的定式化が必要な問題

- インクルーシブとか、光円錐上に離れた演算子とか。。。

B 中間子の物理

- 崩壊定数 $f_B(s)$, $f_D(s)$
- セミレプトニック崩壊 $B \rightarrow \pi l \nu$ $D \rightarrow K l \nu$ etc



レビューはどこかで...

その他のさまざまな課題

- 素粒子反応を定量的に理解
 - K中間子混合、B中間子混合, ...
- 宇宙が安定に存在する理由？
 - 中性子は陽子より重い。クォーク質量差とQED効果の微妙な相殺。
 - アイススピンの破れの定量的理解。
- 核力の理解
- 有限温度・密度相転移
 - 相転移の次数は？ 転移温度は？

今後のチャレンジ

- 格子QCDは実験の一部
 - 素粒子実験ではどうしてもハドロンが出てきちゃう。実験はできるし結果は得られるけど、それが何を意味しているかを読み取るのは難しい。
 - 格子QCD計算は、そのギャップを埋められる。
- そのために必要なのは...
 - 精度。実験家と同じように系統誤差の評価が鍵。
 - 格子QCDで計算できる実験を計画する。

まとめ

- 格子QCDで真空のシミュレーション
 - 場の量子論のもっとも面白い問題 = 素粒子の世界の真空を理解。
 - 実際の素粒子はその励起状態。その性質も計算可能。
- QCD なんてずっと前からある。
 - でもわかっているかどうかは別の話。
 - ようやくもっともらしいシミュレーションができるようになった。
 - これからは本当の数値“実験”。

