素粒子標準模型

津村 浩二 (京大理)

Flavor Physics Workshop 2014

2014年12月8-11日, 浜名湖かんざんじ温泉 ホテル 鞠水亭

山中真人氏、
石田裕之氏、
渡邉諒太郎氏、
村松祐氏

は学生ではありません

目次

- ゲージ変換とは（電磁気学, 量子力学）
- 場の量子論とは（スカラー, QED）
- β崩壊のフェルミ理論 と その限界
- 隠された対称性
- 素粒子標準模型 と その成功
- 標準模型 と フレーバー
  - フレーバー混合（カビボ混合, GIM機構）
  - CPの破れ（小林・益川理論）
  - ユニタリティ三角形

ゲージ変換入門

電磁気学とゲージ変換

ゲージ変換で繋がる一群の等価な理論がある

マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

ベクトルポテンシャルで書き直せる

$$\downarrow$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

スカラーポテンシャルを加えて書き直せる

電磁気の基礎方程式は (A,Φ) で書き表わせたが, 次のような不定性が残る

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \qquad \phi' = \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

Λ は任意の関数

この自由度をゲージ変換という（逆に Λ を上手く選んで式を簡単にできる）

電磁場の波動方程式

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \qquad \phi' = \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \Rightarrow \quad -\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\varepsilon}\rho$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

Λ を上手く選ぶ(ローレンツゲージ) $\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

早さ c で進む波の方程式

$$\begin{cases} \nabla^2\phi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \end{cases}$$

ゲージ変換

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

ローレンツ共変な電磁気学

マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \cdots\cdots\rightarrow \quad -\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\varepsilon}\rho$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \cdots\cdots\rightarrow \quad \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

$$A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$$

$$j_\mu = (\rho_0/\epsilon, -\mu_0\mathbf{j})$$

$$\underbrace{\partial^\nu(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)}_{\text{ゲージ不変な組み合わせ}} = \Box A_\mu - \partial_\mu \underbrace{(\partial^\nu A_\nu)}_{\text{ローレンツゲージ}} = j_\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$

上記のマクスウェル方程式： $\partial^\nu F_{\nu\mu} = j_\mu$

連続の式は反対称性で自明： $\partial^\mu \partial^\nu F_{\nu\mu} = \partial^\mu j_\mu = 0$

ビアンキ恒等式： $\partial_\lambda F_{\nu\mu} + \partial_\nu F_{\mu\lambda} + \partial_\mu F_{\lambda\nu} = 0$

量子力学とゲージ変換

運動量演算子と不確定性関係は１対1？

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad \Longleftrightarrow \quad [\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$$

？

(左から右)： $\left[\frac{\partial}{\partial x}, x\right]\psi = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}(x\,\psi) - x\,\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) = -i\hbar\psi$

(右から左)： $\hat{p}' = \hat{p} + f(\hat{x})$ という不定性がある $\left(\hat{p}' = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + f(x)\right)$

波動関数を上手く位相変換してやると消せる

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + f(x) + \frac{\partial\theta(x)}{\partial x}$$

$$\psi \to e^{i\,\theta(x)/\hbar}\psi$$

この時の局所位相変換をゲージ変換という

ゲージ変換まとめ

電磁ポテンシャルのゲージ変換

$$\begin{cases} \mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\Lambda \\ \phi \to \phi + \dfrac{\partial\Lambda}{\partial t} \end{cases}$$

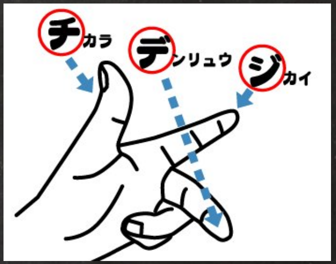
波動関数のゲージ変換

$$\begin{cases} \psi \to e^{i\,\theta(x)/\hbar}\psi \\ -i\,\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_i}\psi \to e^{i\,\theta(x)/\hbar}\Big(-i\,\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_i} + \dfrac{\partial\theta}{\partial x_i}\Big)\psi \end{cases}$$

どちらもゲージ変換と呼んだが, これらの間の関係は？

（注意）そろそろ計算に出てくる c や ℏ を忘れ始めます

電磁場中の荷電粒子(まずは古典力学)



ローレンツ力：$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$

➡ 対応するラグランジアン　$L = \dfrac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - q\left(\phi + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}\right)$

共役な運動量：　$p_i \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\,\dot{x}_i - q\,A_i$

運動方程式(オイラー・ラグランジュ方程式)

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= m\,\ddot{x}_i - q\left[\frac{\partial A_i}{\partial t} + \dot{x}_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right] + q\left[\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right] \\
&= m\,\ddot{x}_i - q\left[\left(-\nabla\phi + \frac{\partial A}{\partial t}\right)_i + \dot{x}_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)\right] \\
&= m\,\ddot{\mathbf{x}} - q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) = 0
\end{aligned}
$$

ちゃんとローレンツ力を再現

ちなみにこの系のハミルトニアンを求めると　$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L = +\dfrac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + q\,\phi$

電磁場中の荷電粒子(つぎに量子力学)

ローレンツ力：$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$

➡ 対応するラグランジアン　$L = \dfrac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - q\left[\phi + \dfrac{1}{m}\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{A}\right]$

共役な運動量：$\hat{p}_i = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_i} - q\,A_i$

微分(運動量)と電磁ポテンシャルが関係付いた

$$\left(\hat{E} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + q\,\phi\right)$$

ゲージ変換まとめ

電磁ポテンシャルのゲージ変換 $$A_i \to A_i + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}$$

波動関数のゲージ変換
$$\begin{cases} \psi \to e^{i\,\theta(x)/\hbar}\psi \\ -i\,\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_i}\psi \to e^{i\,\theta(x)/\hbar}\Big(-i\,\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_i} + \dfrac{\partial\theta}{\partial x_i}\Big)\psi \end{cases}$$

どちらもゲージ変換と呼んだが, これらの間の関係は？

$$\hat{p}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} - q\,A_i - q\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\Lambda - \frac{\theta}{q}\Big)$$

どちらも運動量演算子に余分な項を追加する変換

$$\Lambda = \frac{\theta}{q}$$ と選べば何もなかったことに…

ゲージ変換まとめ

電磁ポテンシャルのゲージ変換 $A_i \to A_i + \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\theta}{\partial x_i}$

波動関数のゲージ変換
$$\begin{cases} \psi \to e^{i\,\theta(x)/\hbar}\psi \\ -i\,\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_i}\psi \to e^{i\,\theta(x)/\hbar}\Big(-i\,\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_i} + \dfrac{\partial\theta}{\partial x_i}\Big)\psi \end{cases}$$

ゲージ不変な運動量（微分）を定義した

$$\Big(-i\,\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} - q\,A_i\Big)\psi \to e^{i\,\theta(x)/\hbar}\Big(-i\,\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} - q\,A_i\Big)\psi$$

これで電磁場があってもシュレディンガー方程式が使える

このように拡張された微分を（ゲージ）共変微分という

$$-i\,\hbar D_i = -i\,\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} - q\,A_i$$

ゲージ変換 = 微分の拡張

自動的に相互作用が導入される

場の量子論入門

量子力学

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

$$H_0(\xi) = 1$$
$$H_1(\xi) = 2\xi$$
$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$$
$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$$
$$\cdots$$

調和振動子のハミルトニアン（質量 m, 振動数 ω）

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega\Big(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2\Big)$$

$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$：無次元化した長さ

固有値と固有関数

$$\begin{cases} E_n = \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\hbar\omega \\ \psi_n = \Big(\frac{\hbar}{\pi^{1/2} 2^n n! m\omega}\Big)^{1/2} H_n(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \end{cases}$$

エルミート多項式使いましたね…

$$\psi_0 = \Big(\frac{\hbar}{\pi^{1/2} m\omega}\Big)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

昇降演算子

調和振動子のハミルトニアン（質量 m, 振動数 ω）

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2\right)$$

$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$: 無次元化した長さ

昇降演算子を使った解法

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)$$

$$\begin{cases} E_n = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \\ \psi_n = (a^\dagger)^n \psi_0 \end{cases}$$

$$\psi_0 = \left(\frac{\hbar}{\pi^{1/2}m\omega}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \Leftarrow a\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\psi_0 \equiv 0$$

これだと誰でも解けますね…

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$[\hat{H}, a] = -\hbar\omega a$$

$$[\hat{H}, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger$$

$a^\dagger$ (a) はエネルギーを ħω 増やす(減らす)

生成/消滅演算子

調和振動子のハミルトニアン（質量 m, 振動数 ω）

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega\Big(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2\Big)$$

$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$：無次元化した長さ

昇降演算子を使った解法

$$\begin{cases} E_n = \Big(a^\dagger a + \frac{1}{2}\Big)\hbar\omega \\ \psi_n = (a^\dagger)^n \psi_0 \end{cases}$$

ざっくり言うと 場の量子論では, 粒子の生成/消滅に対応させる

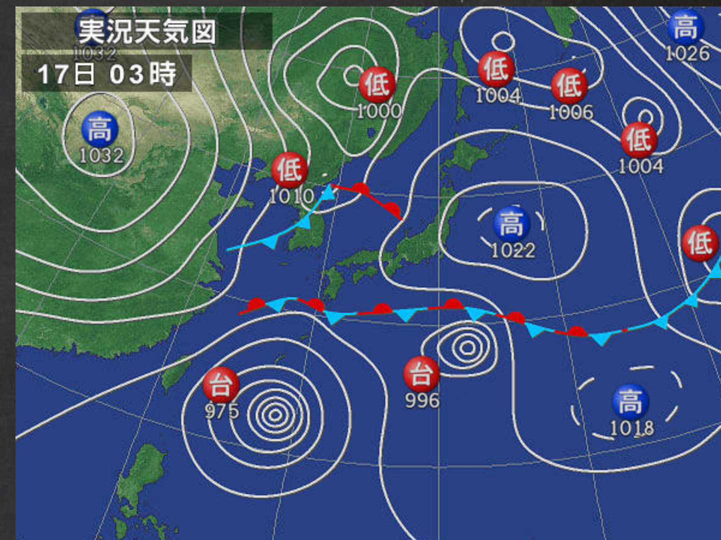
$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$[\hat{H}, a] = -\hbar\omega a$$

$$[\hat{H}, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger$$

$a^\dagger$ (a) はエネルギーを ħω 増やす(減らす)

古典的な場



方向を持たない場
(スカラー場)

イメージです
（実際は温度も分子を媒介して拡がっていくんで...）

方向を持つ場
(ベクトル場とか)

これを量子化する！→ 各点での粒子の生成/消滅を考える

量子場（スカラー場）

$\Box A_\mu = j_\mu$

電磁場で話をするとゲージ固定とかややこしいので, スカラー場で考える

$$(\Box - M^2)\phi(x) = 0$$

自由なスカラー場の波動方程式（クラインゴルドン方程式）

粒子の生成/消滅を表す演算子(波動関数ではない)

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\left[a(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}\right]$$

ローレンツ不変な
運動量の和

粒子の
消滅演算子

粒子の
生成演算子

場のEL方程式

真空の定義と１粒子状態

$$\begin{cases} a(\mathbf{p})|0\rangle = 0 \\ |\mathbf{p}\rangle \sim a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \end{cases}$$

任意の個数の粒子にもそのまま拡張できる

$$|\mathbf{p}, \mathbf{p}', \cdots\rangle \sim a^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p})\cdots|0\rangle$$

調和振動子みたいなラグランジアンからでてくる

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}M^2\phi^2$$

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

スカラー場の理論

ϕ^4 理論： $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + \lambda\phi^4$

運動項と質量項
（あまり気にしなくていい）

相互作用

粒子と粒子が衝突するさま

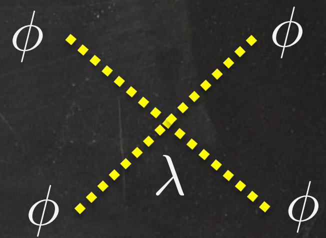
- 違う粒子の散乱でもいい
- Φ³：３点相互作用でもいい
- ローレンツ不変なので１→３とかでもいい

相互作用の強さ

これだけ知っておけばラグランジアンが直感的に理解できる

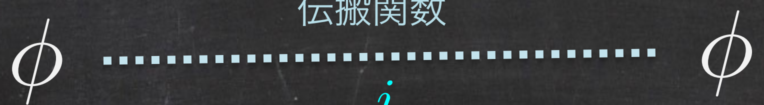
スカラー場の理論

ϕ^4 理論： $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + \lambda\phi^4$



運動項と質量項
（あまり気にしなくていい）

伝搬関数



$$\frac{i}{p^2 - M^2}$$

粒子が相互作用している時以外は
自由に飛んでいることを表している

これだけ知っておけばラグランジアンが直感的に理解できる

補足：相互作用が弱いことを仮定して摂動で計算

場の量子化（補足）

粒子と反粒子が同じ場（π^0とか）：

粒子の
消滅演算子

粒子の
生成演算子

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\left[a(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}\right]$$

$\phi(x) = \phi^*(x)$ なので位相変換 $\phi(x) \to e^{i\theta}\phi(x)$出来ない

電荷を持つスカラー場（π^+とか）：

粒子の
消滅演算子

反粒子の
生成演算子

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\left[a(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x} + b^\dagger(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}\right]$$

$\phi(x) \neq \phi^\dagger(x)$

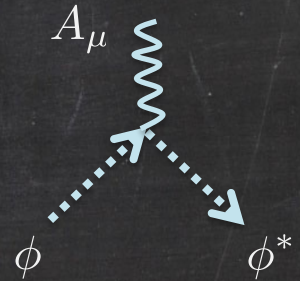
$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [b, b^\dagger] = 1$$

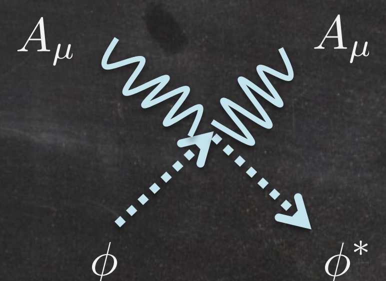
スカラー場の電磁気学

複素スカラー場の理論： $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \, \partial^\mu \phi - M^2 \phi^* \, \phi + \lambda(\phi^* \, \phi)^2$

ゲージ不変にするために微分を拡張 $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - i \, e \, A_\mu$

$$D_\mu \phi^* \, D^\mu \phi \sim -i \, e \, A_\mu(\phi \, \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi) + e^2 \, A_\mu A^\mu \phi^* \phi$$





スカラー場と電磁場の相互作用の形と強さが自動的に決まる

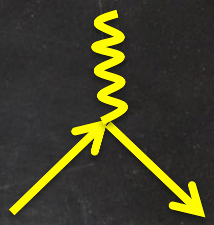
自由な電磁場のラグランジアンも足す（以降, ゲージ化すると言ったら暗に足してる）

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0)$$

量子電磁力学(QED) ~フェルミオン場で復習~

自由なディラック場の波動方程式（ディラック方程式） $(i\,\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi(x) = 0$

これを導くラグランジアン $\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\,\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi$



ゲージ不変にする $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - i\,e\,A_\mu$

量子化はスピンと統計性を考慮する必要がある

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \sum_\lambda \left[a_\lambda(\mathbf{p})\,u_\lambda(\mathbf{p})\,e^{-ip\cdot x} + b_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\,v_\lambda(\mathbf{p})\,e^{ip\cdot x}\right]$$

u(p),v(p)はディラック方程式を満たす関数, λ (=+,-) はヘリシティ

統計性を合わせるために反交換関係で量子化

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad \{b, b^\dagger\} = 1$$

豆知識：a=bとするとマヨラナ場

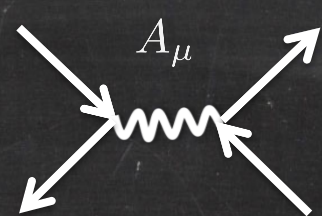
量子電磁力学(QED) ~フェルミオン場で復習~

自由なディラック場の波動方程式（ディラック方程式） $(i\,\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi(x) = 0$

➡ これを導くラグランジアン $\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\,\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi$

➡ ゲージ不変にする $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - i\,e\,A_\mu$

電子の電磁相互作用は光子の交換として理解できる!!



$$i\,\mathcal{M} = \overline{u_1}(i\,e\,\gamma_\mu)u_2 \times \frac{i}{p^2} \times \overline{u_3}(i\,e\,\gamma^\mu)u_4$$

２乗して適当な係数を掛ければ反応率になる

量子場 = 粒子

後はお絵描きすれば計算できる
（計算ツールでも理論の友達でも計算してくれる）

○○理論 = ルールブック

理論の作り方

- 登場する粒子（物質）を決める
- 対称性（ゲージ or/and グローバル）を決める
- 他の相互作用や質量項

Φ^4 理論

- 登場する粒子（物質）を決める　ϕ（実場）
- 対称性（ゲージ or/and グローバル）を決める　とりあえず何も課さない
- 他の相互作用や質量項　可能なものは全部許す

Z$_2$を課してみる

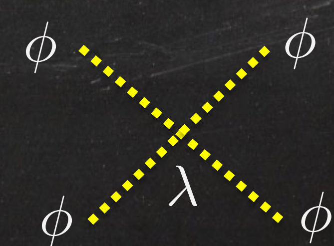
$$\phi \to -\phi$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi + \cancel{\mu^3 \phi} - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 + \cancel{\kappa \phi^3} + \lambda \phi^4 + \cancel{\cdots}$$

場の再定義で消せる
（単なる平方完成です）

$$\phi \to \phi + \frac{\mu^3}{M^2}$$

くりこみ可能性を要求すると消せる



ゲージ理論

- 登場する粒子（物質）を決める　ϕ（複素場）
- 対称性（ゲージ or/and グローバル）を決める　位相変換不変　$\phi \to e^{i\,\theta}\phi$
- 他の相互作用や質量項　くりこみ可能

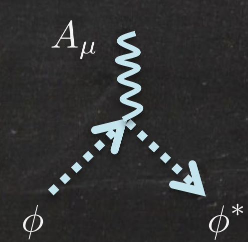
ゲージ対称性に格上げ

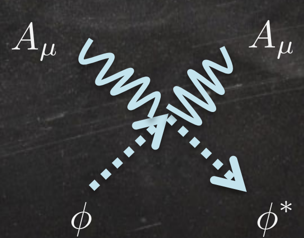
$$\partial_\mu \to \partial_\mu - i\,e\,A_\mu$$

$$\mathcal{L} = \cancel{\partial_\mu\phi^*\,\partial^\mu}\phi - M^2\phi^*\,\phi + \lambda(\phi^*\,\phi)^2$$

$$\partial_\mu\phi^*\,\partial^\mu\phi - i\,e\,A_\mu(\phi\,\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) + e^2\,A_\mu A^\mu\phi^*\phi$$

（スカラー場のゲージ理論）





SU(2) ゲージ理論

パウリ行列
(2x2 エルミート トレースレス)

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\,i\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

- 登場する粒子（物質）を決める
- 対称性（ゲージ or/and グローバル）を決める
- 他の相互作用や質量項

くりこみ可能

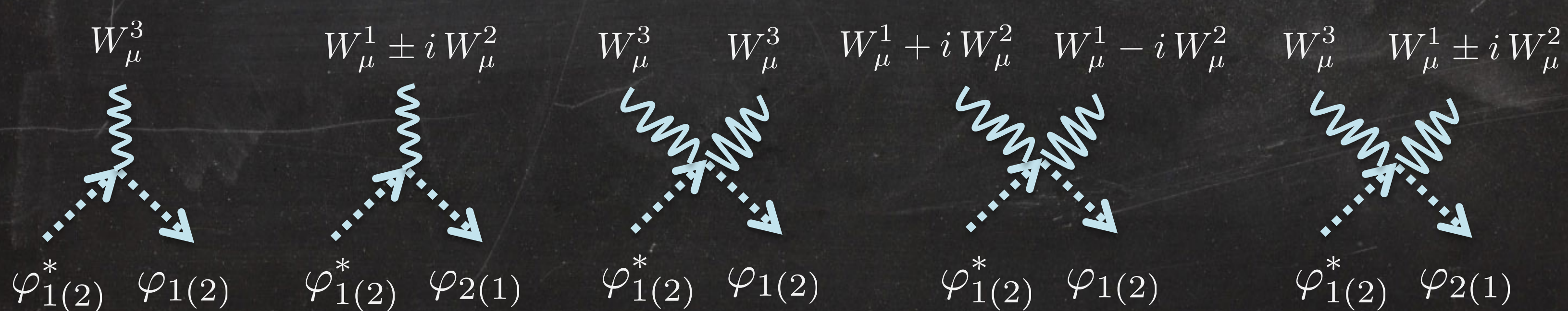
SU(2)不変 $\Phi \to e^{i\,\sigma_a \theta_a}\,\Phi$

ゲージ対称性に格上げ

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - i\,g\,\sigma_a W^a_\mu$$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger\,\partial^\mu \Phi - M^2 \Phi^*\,\Phi + \lambda(\Phi^*\,\Phi)^2$$

$$D_\mu \Phi = \begin{pmatrix} \partial_\mu \varphi_1 - i\,g\,[+W^3_\mu \varphi_1 + (W^1_\mu - i\,W^2_\mu)\varphi_2] \\ \partial_\mu \varphi_2 - i\,g\,[-W^3_\mu \varphi_2 + (W^1_\mu + i\,W^2_\mu)\varphi_1] \end{pmatrix}$$

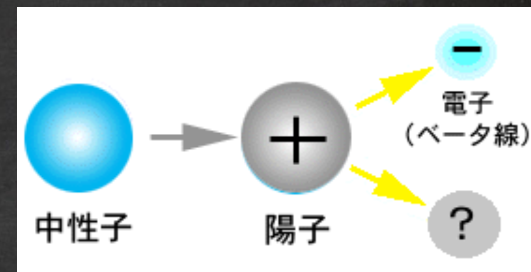


アイソスピンを変える相互作用
（昇降演算子に対応する）

β 崩壊の理論を作る

β崩壊

β崩壊：電子の放出を伴う原子核の崩壊

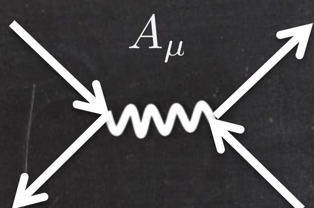


- ✓ エネルギー保存則(と角運動量保存)の破れ？

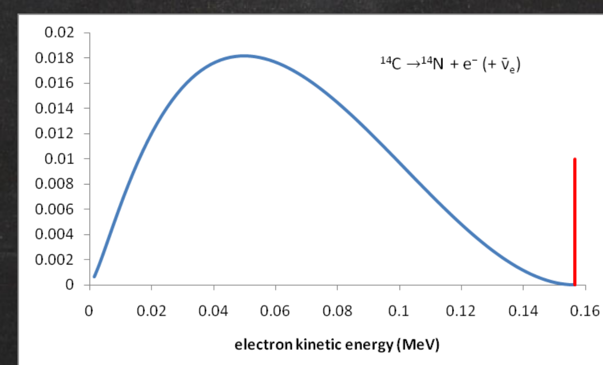
  パウリによるニュートリノの予言 (1931)

ν

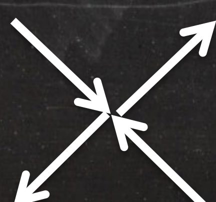
- ✓ 量子電磁力学では説明不可能



QEDは粒子の種類を変えない相互作用



フェルミが４点相互作用を仮定して理解 (1933)

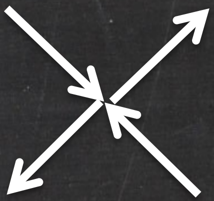


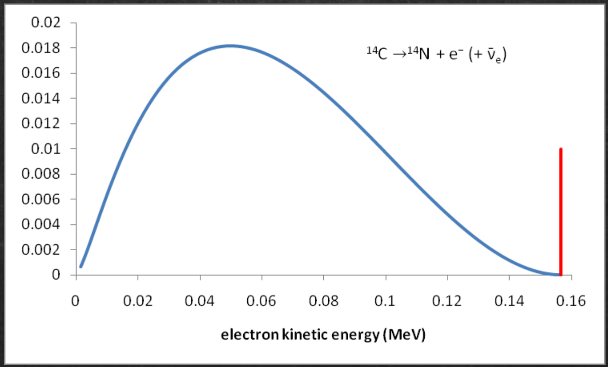
$${}^{A}_{Z}X \to {}^{A}_{Z+1}Y + e + \nu$$

フェルミ理論

- 登場する粒子（物質）を決める $\psi = e,\ \nu,\ p,\ n$
- 対称性（ゲージ or/and グローバル）を決める　レプトン数とバリオン数
- 他の相互作用や質量項　４点相互作用（くりこみ不可能）

$$\mathcal{H}_F = G_F(\overline{\psi_p}\gamma^\mu\psi_n)(\overline{\psi_e}\gamma_\mu\psi_\nu) + \mathrm{H.c.}$$





実はもっといろんな４点相互作用を考えることが出来る
（量子電磁気学からの類推だったのでこの形を採ったのであろう）

パリティ(空間反転)

パリティ変換： $\mathbf{x} \to -\mathbf{x},\ \mathbf{p} \to -\mathbf{p},\ \mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \to \mathbf{L}$

一般に, 空間変換に対しての偶奇性（パリティ）は良い量子数

空間反転は２回行うと元に戻る → 固有値は +1 or -1

質量と寿命が同じ τ と Θ が異なるパリティを持つ（τ-Θパズル）

$$\begin{cases} \tau\ (0^+) \to \pi^0\pi^0 \\ \Theta^+\ (0^-) \to \pi^+\pi^+\pi^0 \end{cases}$$ ダリッツ(1953)

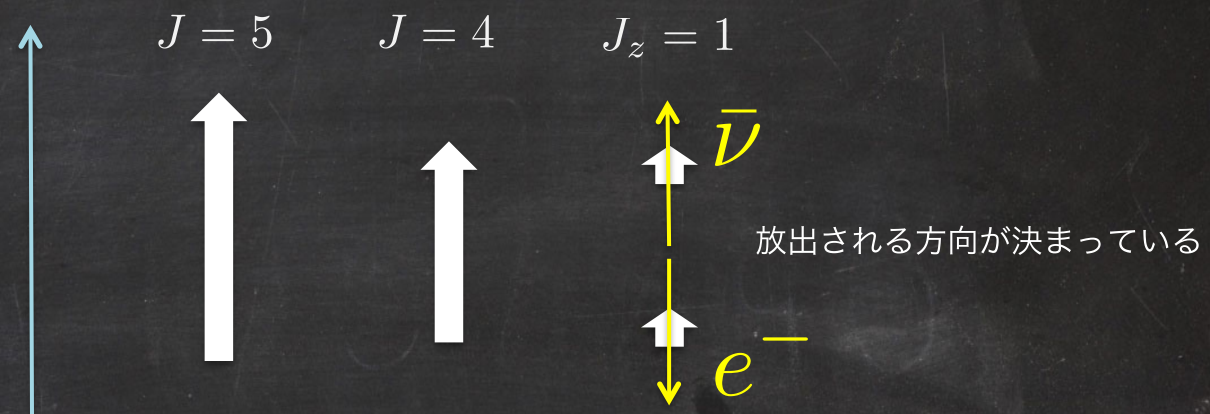
リー, ヤンが 弱い相互作用ではパリティ保存を示す実験事実がない ことを指摘(1956)

すなわち同じ粒子である可能性がある（現在ではK中間子と呼ばれるもの）

ウーによる検証(1957)

パリティの破れ

ウーによる検証(1957)



磁場をかけて偏極させておく(z軸)

$$^{60}\mathrm{Co} \to {}^{60}\mathrm{Ni}^* + (e^-)_L + (\bar{\nu})_R$$

→ 左巻きの電子, 右巻きの反ニュートリノしか関与していない

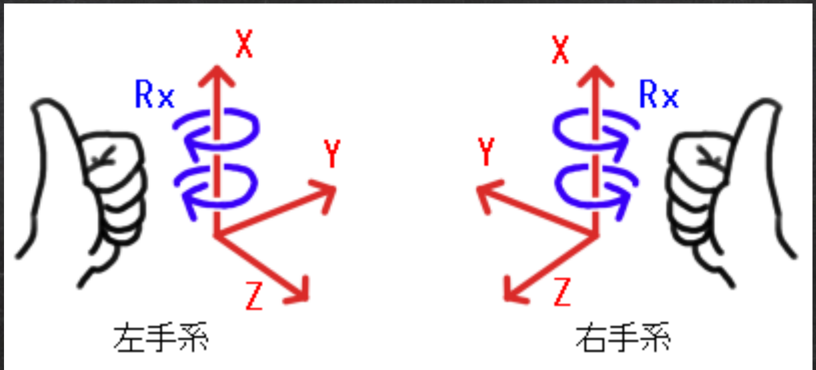
右手系と左手系

パリティ変換： $\mathbf{x} \to -\mathbf{x},\ \mathbf{p} \to -\mathbf{p},\ \mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \to \mathbf{L}$

パリティ変換で, 運動量は逆向き, 角運動量は同じ向き に変わる

右手系から左手系に移ると

- 粒子の回転の向きが同じなら進行方向が反転
- 粒子の進行方向が同じなら回転の向きが反転
  （右巻き→左巻き, 左巻き→右巻き）



左巻きの電子しかでてこないことはパリティを破る

フェルミ理論の修正

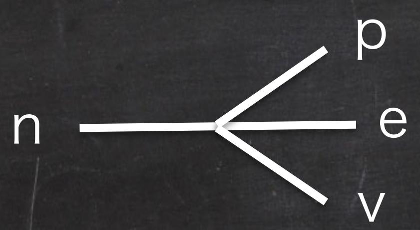
パリティを破る!! (左巻きレプトンのみ関与させる)

$$\mathcal{H}_\beta = 4\frac{G_\beta}{\sqrt{2}}[\overline{p}\gamma^\mu(1+g_A\gamma_5)n]\,(\overline{e_L}\gamma_\mu\nu_L) + \mathrm{H.c.}$$

核子のカレントはローレンツ対称性で許されるもっとも一般的な形

$$(\overline{e_L}\gamma_\mu\nu_L) = (\bar{e}\gamma_\mu\tfrac{1-\gamma^5}{2}\nu)$$

V – A カレントと言う



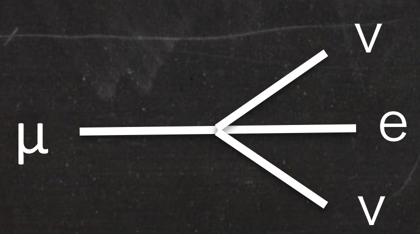
G_β と g_A は実験で決める

($g_A \approx$ -1.26 なのは素過程でないため)

ミューオンの崩壊もよく説明できる, しかも $G_\beta \approx G_\mu$

フェルミはエイヤッと相互作用を書いたんだけど,
核子とレプトンの相互作用の背後に統一的な描像？

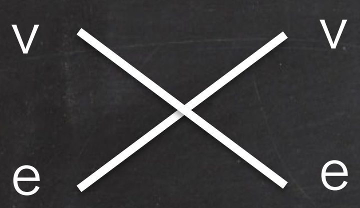
原子核のβ崩壊, 原子核のμ捕獲, μのβ崩壊 で比を作れば良い



$$\mathcal{H}_\mu = 4\frac{G_\mu}{\sqrt{2}}(\overline{\mu_L}\gamma^\mu\nu_L)\,(\overline{e_L}\gamma_\mu\nu_L) + \mathrm{H.c.}$$

フェルミ理論の限界

高エネルギーの振る舞い



ve散乱の断面積を計算してみる

$$\sigma(\nu_e e^-) = \frac{G_F^2 s}{\pi}$$

- 電子もニュートリノも軽いから質量は無視して良い
- 振幅は G_F の２乗に比例していた
- 散乱のエネルギー $\sqrt{s}$ で次元合わせ

$[\sigma] = M^{-2}$, $[G_F] = M^{-2}$, $[\sqrt{s}] = M$

どうも高エネルギーで理論が破綻しているようだ

くりこみ可能性

一般にループを持つ散乱振幅は発散する

<u>発散する相互作用の数が模型で与えた相互作用の数より少なければ吸収できる</u>

→ 繰り込み可能

QEDの場合：

模型で与えたパラメータ

運動項　　電磁相互作用

２点と３点の発散は元の相互作用の基準点をズラして吸収

発散する振幅

２点振幅　　３点振幅

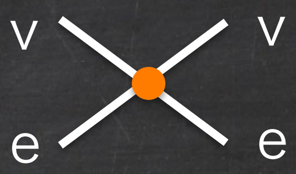
4点以上は発散なし

高次補正が制御可能で，量子論レベルの予言ができる（くりこみ可能）

くりこみ不可能

フェルミ理論の場合：

模型で与えたパラメータ



4点相互作用

そもそも元々6点以上を書いてないことが問題
（しかし, 用意しておくと全て基準点で吸収できてしまう）

4点の発散は元の相互作用の基準点をズラして吸収

発散する振幅

4点振幅

6点振幅

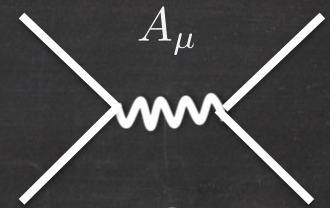
8点以上も発散…

フェルミ理論は, 量子論レベルの予言ができない

フェルミ理論を超える

アナロジー

QEDはくりこみ可能だった!!

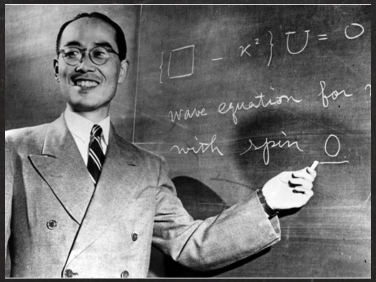


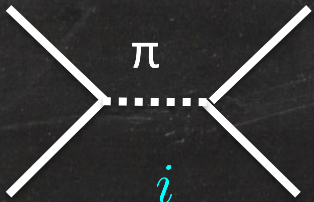
$$i\,\mathcal{M} = \overline{u_1}(i\,e\,\gamma_\mu)u_2 \times \frac{i}{p^2} \times \overline{u_3}(i\,e\,\gamma^\mu)u_4$$

ラフに言って, ココが G_F に変わった

そして, QEDは長距離力で, β 崩壊は短距離力

そう言えば, 核力（原子核の中で陽子や中性子をくっつける）は短距離力だった

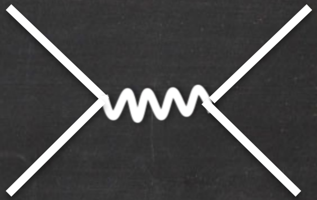




$$\frac{i}{p^2 - M_\pi^2}$$

質量を持ったゲージ場

結合定数 g のゲージ理論？



$$i\,\mathcal{M} \sim \overline{u_1}(i\,g\,\gamma_\mu \mathbf{L})u_2 \times \frac{i}{p^2 - g^2/G_F} \times \overline{u_3}(i\,g\,\gamma^\mu \mathbf{L})u_4$$

低エネルギー極限　フェルミ理論

$$i\,\mathcal{M} \sim G_F \overline{u_1}(i\gamma_\mu \mathbf{L})u_2 \overline{u_3}(i\gamma^\mu \mathbf{L})u_4$$

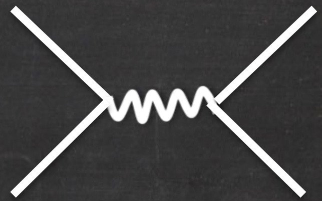
高エネルギー極限　QEDっぽい理論

$$i\,\mathcal{M} \sim \overline{u_1}(i\,g\,\gamma_\mu \mathbf{L})u_2 \times \frac{i}{p^2} \times \overline{u_3}(i\,g\,\gamma^\mu \mathbf{L})u_4$$

フェルミ理論の弱点を克服（高エネルギーでも破綻しない予言可能な理論）

質量を持ったゲージ場

結合定数 g のゲージ理論？



$$i\,\mathcal{M} \sim \overline{u_1}(i\,g\,\gamma_\mu \mathbf{L})u_2 \times \frac{i}{p^2 - g^2/G_F} \times \overline{u_3}(i\,g\,\gamma^\mu \mathbf{L})u_4$$

低エネルギー極限　フェルミ理論

$$i\,\mathcal{M} \sim G_F \overline{u_1}(i\gamma_\mu \mathbf{L})u_2 \overline{u_3}(i\gamma^\mu \mathbf{L})u_4$$

高エネルギー極限　QEDっぽい理論

$$i\,\mathcal{M} \sim \overline{u_1}(i\,g\,\gamma_\mu \mathbf{L})u_2 \times \frac{i}{p^2} \times \overline{u_3}(i\,g\,\gamma^\mu \mathbf{L})u_4$$

~~フェルミ理論の弱点を克服（高エネルギーでも破綻しない予言可能な理論）~~

光子はゲージ対称性により質量を持てない

ゲージ対称性による質量の禁止

電磁場のラグランジアンはゲージ不変： $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Fで書いておけば自動的OKだった

質量を "手で" 加えてみる

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 A^\mu A_\mu$$

$$\partial^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -M^2 A_\nu$$ (マクスウェル方程式)

光子はゲージ対称性により質量を持てない

→ヒッグス機構

隠された対称性

自発的対称性の破れ

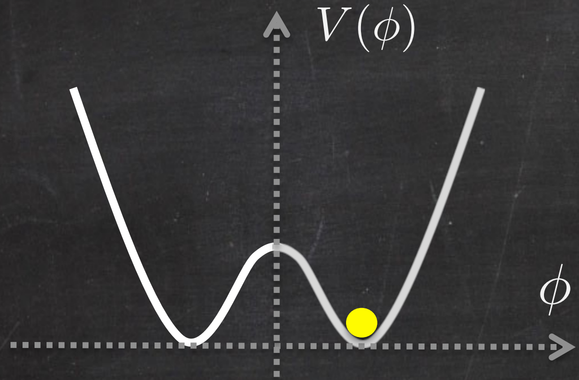
理論の対称性 ≠ この世界の対称性

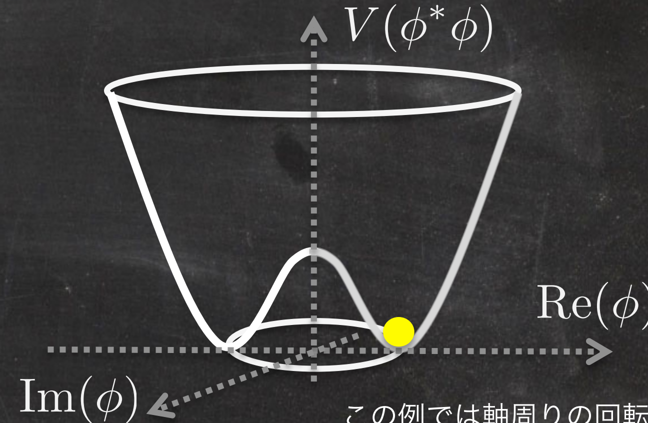
$$V(\phi) = \lambda(\phi^2 - v^2)^2$$

理論は Φ→ - Φ の対称性を持つ

$$V(\phi^*\phi) = \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2$$

理論は Φ → $e^{i\theta}$ Φ の対称性を持つ





この例では軸周りの回転対称性は残る

ポテンシャルの底（真空）に住む我々には対称性は見えない

我々の世界を知るには次の置き換え $\phi \longrightarrow v + \phi$

ゲージ対称性の自発的破れ

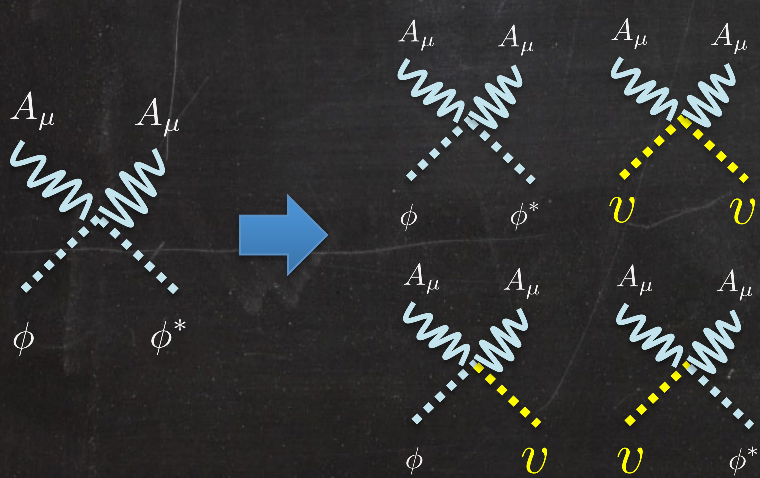
$$\mathcal{L}_\phi = |D_\mu \phi|^2$$
$$= |(\partial_\mu - i\,e\,A_\mu)(v + \phi)|^2$$
$$\rightarrow e^2\, v^2\, A_\mu A^\mu$$

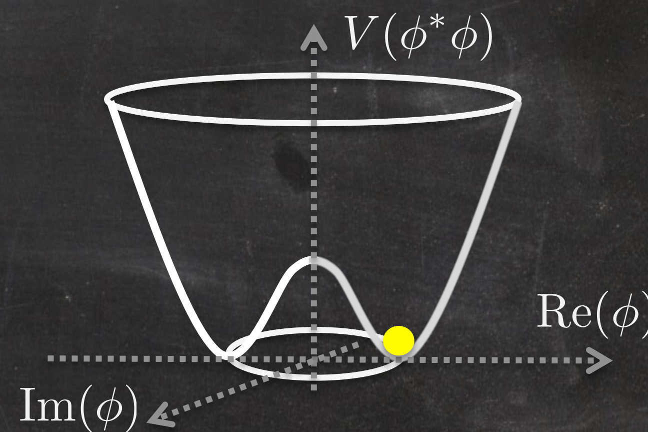
理論の対称性と矛盾しないゲージ場の質量を獲得

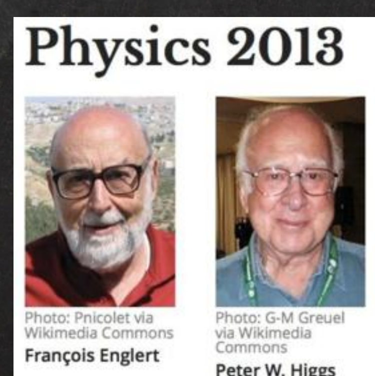
(ヒッグス機構)

$$V(\phi^*\phi) = \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2$$

理論は Φ → e$^{i\theta}$ Φ の対称性を持つ







理論の作り方

- 登場する粒子（物質）を決める
- 対称性（ゲージ or/and グローバル）を決める
- 他の相互作用や質量項
- 真空を決める

これで標準模型の準備ができた

素粒子標準模型

理論の作り方

- 登場する粒子（物質）を決める
- 対称性（ゲージ or/and グローバル）を決める
- 他の相互作用や質量項
- 真空を決める

標準模型の作り方

- 登場する粒子（物質）を決める
  - クオーク
  - レプトン
  - ヒッグス

ニュートリノの右巻きは入れなかった

$$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, u_R, d_R, L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, e_R, \Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

右巻きと左巻きのフェルミオンは別の表現に入れた　$Q = I_3 + Y \quad (I_3 = \frac{1}{2}\sigma_3)$

- 対称性（ゲージ or/and グローバル）を決める
  - ゲージ対称性 [SU(3)$_C$ x] SU(2)$_L$ x U(1)$_Y$　$D_\mu = \partial_\mu - i\, g'\, Y\, B_\mu - i\, g \frac{\sigma_a}{2} W_\mu^a$
  - グローバル対称性 (レプトン数とかバリオン数とかは自動的に含まれる)

- 他の相互作用や質量項
  - くりこみ可能性で許されるものは全て

右巻きと左巻きの表現が違うので質量項はかけない

- 真空を決める　$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

標準模型のラグランジアン

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{SM}} = &- \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\
&+ \overline{Q}\, i\gamma^\mu D_\mu Q + \overline{L}\, i\gamma^\mu D_\mu L \\
&+ \overline{u_R}\, i\gamma^\mu D_\mu u_R + \overline{d_R}\, i\gamma^\mu D_\mu d_R + \overline{e_R}\, i\gamma^\mu D_\mu e_R \\
&+ (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - \lambda(\Phi^\dagger \Phi - \tfrac{1}{2} v^2)^2 \\
&+ \Big\{ + Y_u \overline{Q} \tilde{\Phi} u_R + Y_d \overline{Q} \Phi d_R + Y_e \overline{L} \Phi e_R + \mathrm{H.c.} \Big\}
\end{aligned}
$$

まあ, シンプルかな

SU(2)

$\mathbf{2} = \begin{pmatrix} |1/2, +1/2\rangle \\ |1/2, -1/2\rangle \end{pmatrix}$ $\mathbf{1} = (|0, 0\rangle)$

スピンを記述する代数 [なんか J の方が量子力学っぽいので I の代わりに J で書きました]

右巻きなら j=0, 左巻きなら j=1/2

$$[J^a, J^b] = i\,\epsilon^{abc}\ J^c$$

$$\begin{cases} \mathbf{J}^2|j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle \\ J^3|j,m\rangle = m|j,m\rangle \end{cases}$$

表現のアイソスピン(電荷)を取り出す

$$j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \cdots$$

$$m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j$$

昇降演算子

$$J^{\pm} \equiv J_1 \pm i\,J_2$$

$$[J^+, J^-] = 2\,J^3$$

$$[J^3, J^{\pm}] = \pm\,J^{\pm}$$

$$J^{\pm}|j,m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j+1\pm m)}|j, m\pm 1\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J_+|1/2, +1/2\rangle = 0, \quad J_-|1/2, +1/2\rangle = |1/2, -1/2\rangle$$

$$J_+|1/2, -1/2\rangle = |1/2, +1/2\rangle, \quad J_-|1/2, -1/2\rangle = 0$$

荷電カレント

$$D_\mu = \partial_\mu - i\,\cancel{g' Y} B_\mu - i\,g\left(\frac{\sigma_1}{2}W_\mu^1 + \frac{\sigma_2}{2}W_\mu^2 + \cancel{\frac{\sigma_3}{2}W_\mu^3}\right)$$

対角行列はとりあえず忘れる

書き換え

$$-i\,\frac{g}{\sqrt{2}}\Big(I_+ \underbrace{\frac{W_\mu^1 + i\,W_\mu^2}{\sqrt{2}}}_{\equiv W_\mu^+} + I_- \underbrace{\frac{W_\mu^1 - i\,W_\mu^2}{\sqrt{2}}}_{\equiv W_\mu^-}\Big) \qquad I_\pm = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\,\sigma_2)$$

$$\mathcal{L} = \overline{L}\,i\,\gamma^\mu D_\mu L \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}\overline{\nu_L} & \overline{e_L}\end{pmatrix}\gamma_\mu\, I_+ \begin{pmatrix}\nu_L \\ e_L\end{pmatrix} = \overline{\nu_L}\gamma_\mu\, e_L$$

電荷を変える(V – A)カレントが導出された !!

クオークもレプトンもユニバーサルに結合

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}}\Big[+ (\overline{\nu_L}\gamma^\mu e_L + \overline{u_L}\gamma^\mu d_L)W_\mu^+ + (+\overline{e_L}\gamma^\mu \nu_L + \overline{d_L}\gamma^\mu u_L)W_\mu^-\Big]$$

中性カレントの予言

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$$ I = 1/2, Y = -1/2

$Q = I_3 + Y$

非対角行列はとりあえず忘れる

$$D_\mu = \partial_\mu - i\, g'\, Y\, B_\mu - i\, g \left(\cancel{\frac{\sigma_1}{2} W_\mu^1} + \cancel{\frac{\sigma_2}{2} W_\mu^2} + \frac{\sigma_3}{2} W_\mu^3 \right)$$

左巻きレプトンを想定して書き換え

$$-\frac{i}{2} \begin{pmatrix} g' B_\mu + g W_\mu^3 & 0 \\ 0 & g' B_\mu - g W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \sqrt{g'^2 + g^2} \left(\frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g^2}} B_\mu + \frac{g}{\sqrt{g'^2 + g^2}} W_\mu^3 \right) = g_Z\, Z_\mu$$

ニュートリノは電荷がないから 光子とは別のゲージ場 (New)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}, \quad \tan\theta_W = \frac{g'}{g}$$

Z と直交する ゲージ場A

素電荷 e とすれば QED

$$+2\left\{ \frac{g' g}{\sqrt{g'^2 + g^2}} A_\mu + \sqrt{g'^2 + g^2} \left(-\tfrac{1}{2} + \sin^2\theta_W \right) Z_\mu \right\}$$

QED と (弱)電荷に依存する結合

$$\mathcal{L}_{NC} = \sum_{f=u,d,e,\nu} \left[+ \bar{f}\, i\, e\, Q_f\, \gamma^\mu A_\mu f + \bar{f}\, i\, g_Z\, (I_{3f}\mathbf{L} - Q_f \sin^2\theta_W)\, \gamma^\mu Z_\mu f \right]$$

ヒッグス機構

$Q_\Phi = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, I_+ = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, I_- = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$D_\mu = \partial_\mu - i\,\frac{g}{\sqrt{2}}(I_+ W^+_\mu + I_- W^-_\mu) - i\,g_Z(I_3 - Q\sin^2\theta_W)Z_\mu - i\,e\,Q\,A_\mu$$

$$\Rightarrow \quad \left|D_\mu \Phi\right|^2 \to \left|D^{(\Phi)}_\mu \begin{pmatrix}0\\ v/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right|^2 = \left|\begin{pmatrix}-i\,\frac{g\,v}{2}W^+_\mu\\ +i\,\frac{g_Z\,v}{2\sqrt{2}}Z_\mu\end{pmatrix}\right|^2 = \left(\frac{g\,v}{2}\right)^2 W^{-\mu}W^+_\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{g_Z\,v}{2}\right)^2 Z^\mu Z_\mu$$

WとZは確かに質量を持つ, 光子は質量０

(真空は電荷を持たない)

フェルミオン質量（ボーナス!!）

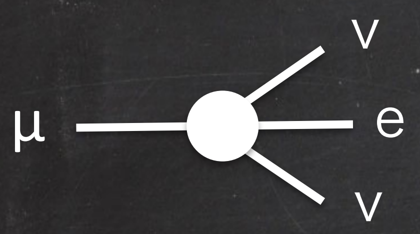
$$+Y_u\overline{Q}\tilde{\Phi}u_R + Y_d\overline{Q}\Phi d_R + Y_e\overline{L}\Phi e_R + \text{H.c.} \to \left(\frac{Y_u v}{\sqrt{2}}\right)\overline{u}u + \left(\frac{Y_d v}{\sqrt{2}}\right)\overline{d}d + \left(\frac{Y_e v}{\sqrt{2}}\right)\overline{e}e$$

ニュートリノは質量０

いつもならココからヒッグスの話

（実は南部・ゴールドストンの定理とか飛ばした）

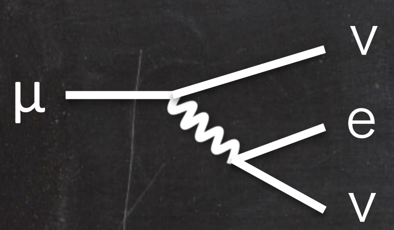
フェルミ理論の再解釈



$$\mathcal{M}_{\text{Fermi}} = i\,4\,\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left(\overline{\mu_L}\gamma^{\mu}\nu_L\right)\left(\overline{e_L}\gamma_{\mu}\nu_L\right)$$

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}\left(=\frac{1}{2v^2}\right)$$

G_F は真空期待値そのものだった!!



$$\mathcal{M}_{\text{SM}} = \left(\overline{\mu_L}\,i\,\frac{g}{\sqrt{2}}\,\gamma^{\mu}\nu_L\right)\frac{i}{p^2 - M_W^2}\left(\overline{e_L}\,i\,\frac{g}{\sqrt{2}}\,\gamma_{\mu}\nu_L\right)$$

ミューオンの崩壊なので p^2 は大きくても M_μ^2

標準模型の成功

パラメータの整理：標準模型の電弱セクターには g’, g, v の３つしかパラメータがない

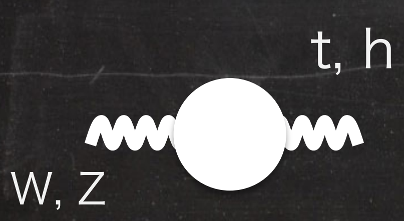
$$e = \frac{g' g}{\sqrt{g'^2 + g^2}}, \quad G_F = \frac{1}{\sqrt{2} v^2}, \quad \sin^2\theta_W = \frac{g'^2}{g'^2 + g^2}$$

トムソン散乱で決める　　ミューオン崩壊で決める　　中性カレントの発見(&測定)で決める

➡ W, Z の質量を予言（→発見）

精度のもっとも良い３つでくりこめば良いので, ワインバーグ角の代わりに M_Z を使ったりもする

➡ くりこみ可能なので高次補正も含めて予言（→一致）



- ループ補正を通じて M_t を予言（→発見）
- ループ補正を通じて M_h を予言（→発見）
- 実験精度の向上により, 寧ろループ補正がないと標準模型は合わないレベル

電弱標準模型

- β崩壊のフェルミ理論(1934)
- 非可換ゲージ理論(1954)
- パリティの破れ(1956)
- 自発的対称性の破れ(1961)
- ヒッグス機構(1964)
- 電弱標準模型(1967)
- くりこみ可能性の証明(1971)
- 中性カレントの発見(1973)
- W, Zの発見(1983)
- 電弱精密測定(1990年代〜)
- ヒッグスボソンの発見(2012)

1937 ミューオンの発見
1947 ストレンジネスの発見
1956 電子ニュートリノの発見
1962 ミューニュートリノの発見
1963 カビボ混合
1964 クオークモデル
1964 CPの破れの発見
1970 GIM機構
1973 小林益川理論
1974 チャーム(J/Ψ)の発見
1975 タウの発見
1977 ボトムの発見
1995 トップの発見
1998 ニュートリノ振動
2000 タウニュートリノの発見

フレーバー

ミュー中間子の発見

背景：p, n, e, γ で自然が説明されていた（+パウリが ν を予言）

霧箱に飛んできた宇宙線が電子より重いが同じ電荷を持っている
[陽子よりは軽い → 陽子 > 中間子 > 電子] アンダーソン, ネッダマイヤー(1937)

"Who ordered that ?" ラビ

なんでもいいから見つかって欲しいと思っている現在の我々とは違いますね…

"π中間子 !!" 湯川 (1935)　(中間子論)

→ 後に別粒子として発見　パウエル(1947)

注文してました… 確かに電荷も質量もあう

"μ中間子 !!" 井上・坂田 (1942)　(二中間子論)

π中間子は大気と反応して地上には届かないハズ → 別の中間子

"2ニュートリノ仮説" 西島 (1957)

→ 少なくとも２種類あることを発見　レーダーマンら(1962)

μ-e遷移が起こらないことから

標準模型確立の背後で第二世代が産声をあげる

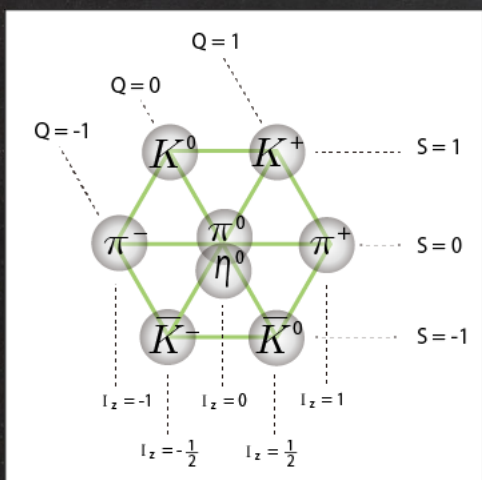
F1

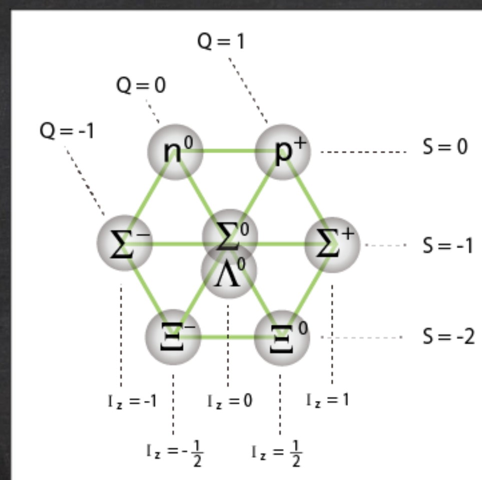
奇妙さ(ストレンジネス)の発見

背景：加速器で生成した新しい粒子が既知の粒子の励起状態だった

「奇妙な粒子」は対で生成される（新しい保存量を示唆？）

しかし，「奇妙さ」を持たない粒子に崩壊してしまう…





坂田模型(1955)

$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \Lambda$ を使ってメソンを説明

クオーク模型 ゲルマン(1964)

$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, s$ を使ってメソンとバリオンを説明

$$Q = I_z + \frac{S}{2}$$

$$Q = I_z + \frac{S+1}{2}$$

$$Q = I_3 + \frac{S+B}{2} = I_3 + Y$$

中野・西島・ゲルマンの法則(1959)

カビボ混合

u, d, s を使って弱い相互作用を記述する $Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L^0 \end{pmatrix}, s_L^0, u_R, d_R, s_R$

二重項の相棒がいないので一重項にいれた

左巻きと右巻きが
- 同じ表現　　　：ベクターフェルミオン
- 異なる表現　　：カイラルフェルミオン
と呼ぶ

s のラグランジアン

$$\mathcal{L}_s = \overline{s_L^0}\, i\gamma^\mu D_\mu s_L^0 + \overline{s_R}\, i\gamma^\mu D_\mu s_R + M_s(\overline{s_L^0} s_R + \overline{s_R} s_L^0)$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \to e^{i\theta} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \\ s \to e^{i\theta_s} \end{cases}$$

(u, d)の組と s は別の位相変換で不変
→ 第一世代数とストレンジネスの保存

しかし, 実際には $K^- \to \pi^- \pi^0$ のようなストレンジネスを破る遷移が起きている

$$d_L^0 = d_L \cos\theta_c + s_L \sin\theta_c$$

カビボ(1963)

$$\begin{pmatrix} d^0 \\ s^0 \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L$$

「奇妙さ」の解決

「奇妙な粒子」は対で生成される（新しい保存量を示唆？）
しかし，「奇妙さ」を持たない粒子に崩壊してしまう…

d と s のフレーバー混合を使って弱い相互作用を記述する

$$Q = \begin{pmatrix} u \\ d\cos\theta_c + s\sin\theta_c \end{pmatrix}_L, -d_L\sin\theta_c + s_L\cos\theta_c, u_R, d_R, s_R$$

ストレンジネスを破る過程は弱い相互作用と考える

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}}\left(+\cos\theta_c\overline{u_L}\gamma^\mu d_L + \sin\theta_c\overline{u_L}\gamma^\mu s_L\right)W_\mu^+ + \mathrm{H.c.}$$

１つ余計なパラメータが入ったのでこれで合わせる $\sin\theta_c \simeq 0.23$

例) $\frac{\Gamma(K^+\to\mu^+\nu)}{\Gamma(\pi^+\to\mu^+\nu)} \simeq \tan^2\theta_c$

強い力で生成されて，弱い相互作用で崩壊すると考えれば解決

フェルミ定数再考

ちなみに原子核のβ崩壊とμのβ崩壊のフェルミ定数の違いは…

$$\begin{cases} G_\beta = 1.136 \times 10^{-5}\mathrm{GeV}^{-2} \\ G_\mu = 1.166 \times 10^{-5}\mathrm{GeV}^{-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta_c = \sqrt{1 - \left(\frac{G_\beta}{G_\mu}\right)^2} \simeq 0.23$$

ストレンジネスを破る過程は弱い相互作用と考える

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}}\left(+ \cos\theta_c \overline{u_L}\gamma^\mu d_L + \sin\theta_c \overline{u_L}\gamma^\mu s_L \right) W_\mu^+ + \mathrm{H.c.}$$

１つ余計なパラメータが入ったのでこれで合わせる $\sin\theta_c \simeq 0.23$

例) $\dfrac{\Gamma(K^+ \to \mu^+\nu)}{\Gamma(\pi^+ \to \mu^+\nu)} \simeq \tan^2\theta_c$

ゲルマン-レビ混合？

ちなみに原子核のβ崩壊とμのβ崩壊のフェルミ定数の違いは…

$$\begin{cases} G_\beta = 1.136 \times 10^{-5}\mathrm{GeV}^{-2} \\ G_\mu = 1.166 \times 10^{-5}\mathrm{GeV}^{-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta_c = \sqrt{1 - \left(\frac{G_\beta}{G_\mu}\right)^2} \simeq 0.23$$

we obtain $G/G_\mu = 0.97 \pm 0.01$ rather than unity (*).

ゲルマン-レビ(1960)

(*) *Note added in proof.* – Should this discrepancy be real, it would probably indicate a total or partial failure of the conserved vector current idea. It might also mean, however, that the current is conserved but with $G/G_\mu < 1$. Such a situation is consistent with universality if we consider the vector current for $\Delta S = 0$ and $\Delta S = 1$ together to be something like:

$$GV_\alpha + GV_\alpha^{(\Delta S=1)} = G_\mu \bar{p}\gamma_\alpha(n + \varepsilon\Lambda)(1+\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} + \ldots\,,$$

$$\begin{pmatrix} d^0 \\ s^0 \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L$$

カビボ混合の問題点

フレーバーを破る中性カレント(FCNC)

s⁰はベクターフェルミオンでLRと区別しない

$$\mathcal{L}_{NC,Z} = +i\,g_Z\,Z_\mu\Big\{ +\overline{d^0}(-\tfrac{1}{2}\mathbf{L} + \tfrac{1}{3}\sin^2\theta_W)\,\gamma^\mu d^0 + \overline{s^0}(+\tfrac{1}{3}\sin^2\theta_W)\,\gamma^\mu s^0 \Big\}$$

$$= +i\,g_Z\,Z_\mu\Big\{ +\tfrac{1}{3}\sin^2\theta_W(\bar{d}\,\gamma^\mu d + \bar{s}\,\gamma^\mu s)$$

$$-\tfrac{1}{2}\big[\cos^2\theta_c\overline{d_L}\gamma^\mu d_L + \sin\theta_c\cos\theta_c(\overline{d_L}\gamma^\mu s_L + \overline{s_L}\gamma^\mu d_L) + \sin^2\theta_c\overline{s_L}\gamma^\mu s_L\big]\Big\}$$

Z媒介でストレンジネスを変える相互作用

$$\propto \frac{g_Z}{2}\sin\theta_c\cos\theta_c$$

$$\propto \frac{g}{\sqrt{2}}\sin\theta_c$$

$$\frac{\mathcal{B}(K^0\to\mu\mu)}{\mathcal{B}(K^+\to\mu\nu)} = \frac{7\times10^{-9}}{0.64} \approx 10^{-8}$$

しかし, 実験事実は中性カレントが抑制されている

全然, 合わない!!

グラショウ-イリオポロス-マイアニ(1970)

GIM機構

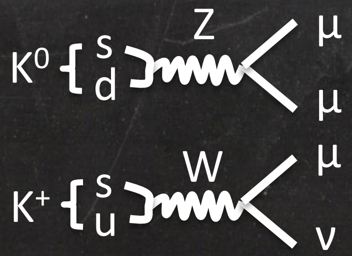
s_R にも二重項のパートナーをいれる

$$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L^0 \end{pmatrix}, s_L^0, u_R, d_R, s_R \;\Rightarrow\; Q_1 = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L^0 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} c_L \\ s_L^0 \end{pmatrix}, u_R, d_R, s_R, c_R$$

今度は s^0 も d^0 も同じように相互作用

$$\mathcal{L}_{NC,Z} = +i\, g_Z\, Z_\mu \Big\{ +\overline{d^0}(-\tfrac{1}{2}\mathbf{L} + \tfrac{1}{3}\sin^2\theta_W)\,\gamma^\mu d^0 + \overline{s^0}(-\tfrac{1}{2}\mathbf{L} + \tfrac{1}{3}\sin^2\theta_W)\,\gamma^\mu s^0 \Big\}$$
$$= +i\, g_Z\, Z_\mu \Big\{ +\bar{d}(-\tfrac{1}{2}\mathbf{L} + \tfrac{1}{3}\sin^2\theta_W)\,\gamma^\mu d + \bar{s}(-\tfrac{1}{2}\mathbf{L} + \tfrac{1}{3}\sin^2\theta_W)\,\gamma^\mu s \Big\}$$

結果として, フレーバーを破る中性カレント (FCNC) は出ない

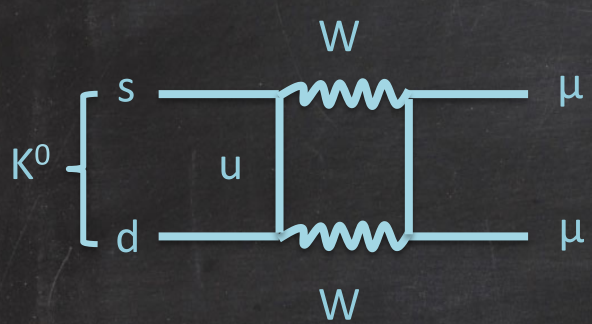


全く出ないのも困るんだが…(´・ω・`)

$$\frac{\mathcal{B}(K^0 \to \mu\mu)}{\mathcal{B}(K^+ \to \mu\nu)} = \frac{7\times 10^{-9}}{0.64} \approx 10^{-8}$$

GIM機構

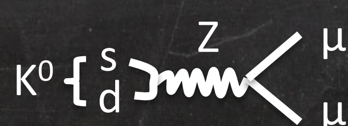
そうだ ~~京都、行こう (JR東海)~~ ループでだそう。



ループ積分で決まって出てくるファクター

素朴な期待：$\dfrac{g^2}{(4\pi)^2}(\sin\theta_c\cos\theta_c)^2 \sim 5\times 10^{-4}$

あと4-5桁は抑制が必要!!



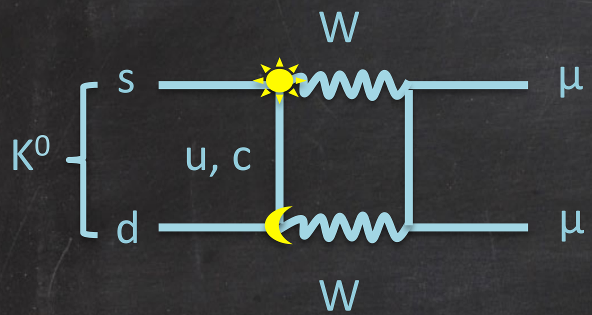
全く出ないのも困るんだが…(´・ω・`)

$$\frac{\mathcal{B}(K^0\to\mu\mu)}{\mathcal{B}(K^+\to\mu\nu)} = \frac{7\times 10^{-9}}{0.64} \approx 10^{-8}$$

F6’

GIM機構

教訓：FCNCは抑制されるので新物理の良いテスト環境



測定された分岐比からM_cが予言された
(実際にはK^0混合を使うのが良い)

<u>uの寄与</u>　　　　<u>cの寄与</u>

$$F(M_u) \times (\cos\theta_c) \times (\sin\theta_c) + F(M_c) \times (-\sin\theta_c) \times (\cos\theta_c)$$

質量が同じだとゼロ

$$= [F(M_u) - F(M_c)] \sin\theta_c \cos\theta_c$$

$$= \left(B\frac{M_u^2 - M_c^2}{M_W^2} + \cdots \right) \sin\theta_c \cos\theta_c$$

クオークとWの質量の比で抑制された寄与から始まる

ループ積分からくる関数
(内線のクオークの質量に依存)

$$F(M_x) = A + B\frac{M_x^2}{M_W^2} + C\left(\frac{M_x^2}{M_W^2}\right)^2 + \cdots$$

A, B, C は定数

J/Ψの発見 (1974)

リヒター(SLAC), 丁(BNL) で独立に

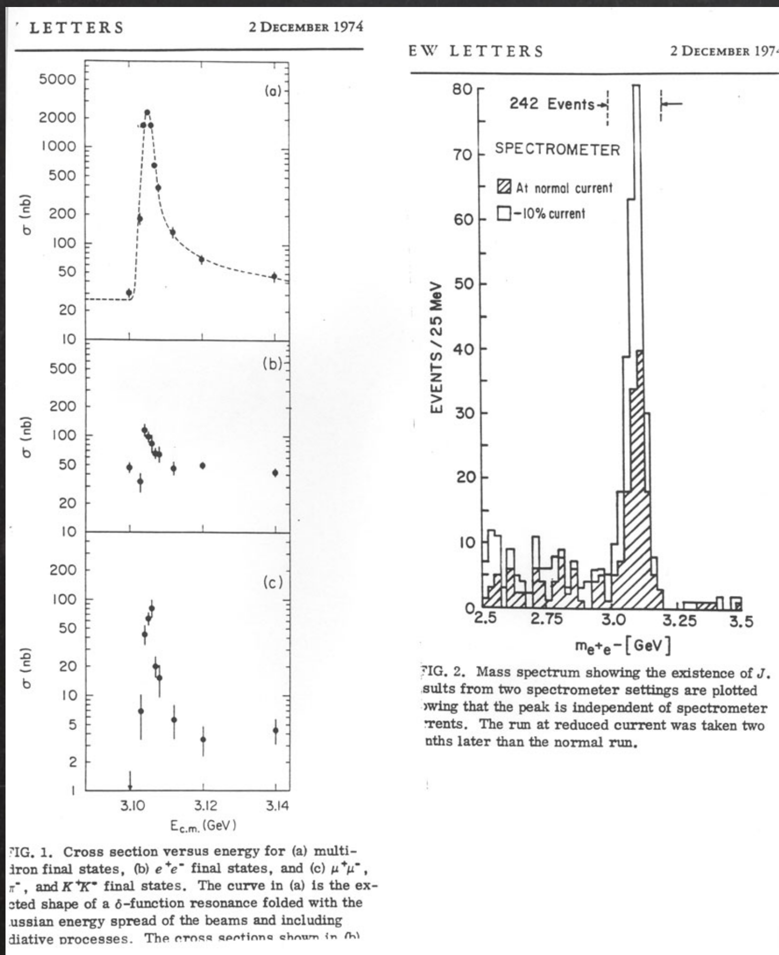


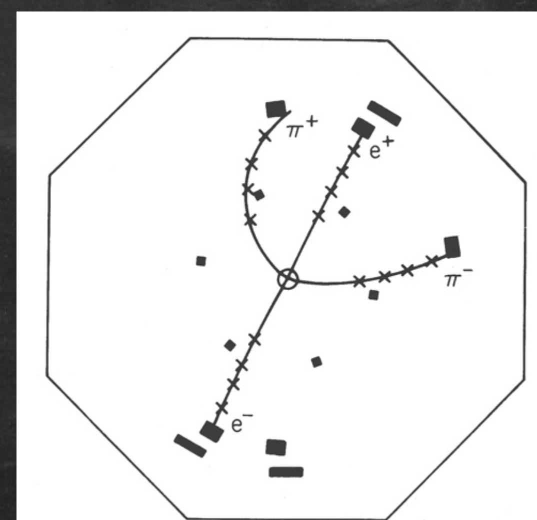
FIG. 1. Cross section versus energy for (a) multi-
iron final states, (b) e^+e^- final states, and (c) $\mu^+\mu^-$,
π^-, and K^+K^- final states. The curve in (a) is the ex-
cted shape of a δ-function resonance folded with the
ussian energy spread of the beams and including
diative processes. The cross sections shown in (b)

FIG. 2. Mass spectrum showing the existence of J.
sults from two spectrometer settings are plotted
wing that the peak is independent of spectrometer
rents. The run at reduced current was taken two
nths later than the normal run.

11月革命と呼ばれるらしい

ヒッグスの発見はこれと対比して7月革命と呼ばれたりした
そのくらいインパクトのあることだったのだろう

測定された分岐比からM_cが予言された
(実際にはK^0混合を使うのが良い)



小林・益川理論に向けて

フレーバー混合の起源

1世代クオークのみの一般のラグランジアン

$$\mathcal{L} = +\,\overline{u_L^0}\,i\gamma^\mu\partial_\mu u_L^0 + \overline{d_L^0}\,i\gamma^\mu\partial_\mu d_L^0 + \overline{u_R^0}\,i\gamma^\mu\partial_\mu u_R^0 + \overline{d_R^0}\,i\gamma^\mu\partial_\mu d_R^0$$
$$+\left\{+\,M_u\overline{u_L^0}u_R^0 + M_d\overline{d_L^0}d_R^0 + \mathrm{H.c.}\right\}$$

$$M_u = |M_u|e^{i\,\theta_u} \quad M_d = |M_d|e^{i\,\theta_d}$$

一般に複素数で良い（極形式で書いた）

右巻き粒子の位相の再定義でパラメータを実に出来る

（最初から, 結合を実定数だと思って０を落としておいても良い）

$$u_R = e^{i\,\theta_u}u_R^0 \qquad d_R = e^{i\,\theta_d}d_R^0$$

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{u_L^0}\gamma^\mu d_L^0\,W_\mu^+ + \mathrm{H.c.}$$ （修正なし）

フレーバー混合の起源

２世代までいれた一般のラグランジアン

運動項は対角的（定義）

$$\mathcal{L} = + \begin{pmatrix} \overline{u_L^0} & \overline{c_L^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\gamma^\mu\partial_\mu & 0 \\ 0 & i\gamma^\mu\partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L^0 \\ c_L^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{d_L^0} & \overline{s_L^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\gamma^\mu\partial_\mu & 0 \\ 0 & i\gamma^\mu\partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L^0 \\ s_L^0 \end{pmatrix} + (L \to R)$$

$$+ \left\{ \begin{pmatrix} \overline{u_L^0} & \overline{c_L^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{uu} & M_{uc} \\ M_{cu} & M_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R^0 \\ c_R^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{d_L^0} & \overline{s_L^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{dd} & M_{ds} \\ M_{sd} & M_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R^0 \\ s_R^0 \end{pmatrix} + \mathrm{H.c.} \right\}$$

$\Downarrow$ 質量行列は 2 x 2 の複素行列

$$V_L^\dagger \begin{pmatrix} |M_1| & 0 \\ 0 & |M_2| \end{pmatrix} U_R$$

一般の複素行列は２つのユニタリ行列で正定値まで対角化出来る

場の再定義をする（今度は左巻きのクオークも再定義）

$$\begin{pmatrix} u_L \\ c_L \end{pmatrix} = V_u \begin{pmatrix} u_L^0 \\ c_L^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} = V_d \begin{pmatrix} d_L^0 \\ s_L^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} = U_u \begin{pmatrix} u_R^0 \\ c_R^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} = U_d \begin{pmatrix} d_R^0 \\ s_R^0 \end{pmatrix}$$

フレーバー混合の起源

2世代までいれた一般のラグランジアン

$$\mathcal{L} = + \begin{pmatrix} \overline{u_L} & \overline{c_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\gamma^\mu \partial_\mu & 0 \\ 0 & i\gamma^\mu \partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{d_L} & \overline{s_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\gamma^\mu \partial_\mu & 0 \\ 0 & i\gamma^\mu \partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} + (L \to R)$$

$$+ \left\{ \begin{pmatrix} \overline{u_L} & \overline{c_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |M_u| & 0 \\ 0 & |M_c| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{d_L} & \overline{s_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |M_d| & 0 \\ 0 & |M_s| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} + \text{H.c.} \right\}$$

場の再定義をする（今度は左巻きのクオークも再定義）

$$\begin{pmatrix} u_L \\ c_L \end{pmatrix} = V_u \begin{pmatrix} u_L^0 \\ c_L^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} = V_d \begin{pmatrix} d_L^0 \\ s_L^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} = U_u \begin{pmatrix} u_R^0 \\ c_R^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} = U_d \begin{pmatrix} d_R^0 \\ s_R^0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \overline{u_L} & \overline{c_L} \end{pmatrix} V_u^\dagger V_d \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} W_\mu^+ + \text{H.c.}$$

（フレーバー混合）

フレーバー混合の起源

２世代までいれた一般のラグランジアン

$$\mathcal{L} = + \left(\overline{u_L} \quad \overline{c_L}\right) \begin{pmatrix} i\gamma^\mu\partial_\mu & 0 \\ 0 & i\gamma^\mu\partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \end{pmatrix} + \left(\overline{d_L} \quad \overline{s_L}\right) \begin{pmatrix} i\gamma^\mu\partial_\mu & 0 \\ 0 & i\gamma^\mu\partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} + (L \to R)$$

$$+ \left\{ \left(\overline{u_L} \quad \overline{c_L}\right) \begin{pmatrix} |M_u| & 0 \\ 0 & |M_c| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} + \left(\overline{d_L} \quad \overline{s_L}\right) \begin{pmatrix} |M_d| & 0 \\ 0 & |M_s| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} + \mathrm{H.c.} \right\}$$

積は単に２x２のユニタリ–行列（１角度＋３位相）

$$V_u^\dagger V_d = \begin{pmatrix} e^{i\,\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\,\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\,(\alpha-\gamma)} \end{pmatrix}$$

一般性を失わずここまで書き換え

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\overline{u_L} \quad \overline{c_L}\right) V_u^\dagger V_d \, \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} W_\mu^+ + \mathrm{H.c.}$$ （フレーバー混合）

F9”

2x2ユニタリ行列

$$VV^\dagger = V^\dagger V = \mathbf{1} \quad (V_{ik}V^*_{jk} = V^*_{ki}V_{kj} = \delta_{ij})$$

成分で書いた

$$\begin{pmatrix} |V_{11}|^2 + |V_{12}|^2 & \text{c.c.} \\ V_{21}V^*_{11} + V_{22}V^*_{12} & |V_{21}|^2 + |V_{22}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |V_{11}|^2 + |V_{21}|^2 & \text{c.c.} \\ V^*_{12}V_{11} + V^*_{22}V_{21} & |V_{12}|^2 + |V_{22}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

さらに自由なパラメータ

$$V_{12} = -e^{i\,\gamma}\sin\theta$$

二乗和が１の範囲でパラメトライズ

$$V_{11} = e^{i\,\alpha}\cos\theta, V_{21} = e^{i\,\beta}\sin\theta$$

$$V_{21}V^*_{11} + V_{22}V^*_{12} = e^{i(\beta-\alpha)}\sin\theta\cos\theta - e^{-i\gamma}\sin\theta V_{22} = 0$$

V_{22}が決まる

一般の２x２ユニタリ行列は１角度３位相 (数勘定だけでやると騙された気になるのであからさまにやりました)

$$V = \begin{pmatrix} e^{i\,\alpha}\cos\theta & e^{i\,\gamma}\sin\theta \\ -e^{i\,\beta}\sin\theta & e^{-i\,(\alpha-\beta-\gamma)}\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\,\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\,\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\,(\alpha-\gamma)} \end{pmatrix}$$

キレイに書き換え

フレーバー混合の起源

２世代までいれた一般のラグランジアン

$$\mathcal{L} = + \left(\overline{u_L} \quad \overline{c_L}\right) \begin{pmatrix} i\gamma^\mu\partial_\mu & 0 \\ 0 & i\gamma^\mu\partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \end{pmatrix} + \left(\overline{d_L} \quad \overline{s_L}\right) \begin{pmatrix} i\gamma^\mu\partial_\mu & 0 \\ 0 & i\gamma^\mu\partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} + (L \to R)$$

$$+ \left\{ \left(\overline{u_L} \quad \overline{c_L}\right) \begin{pmatrix} |M_u| & 0 \\ 0 & |M_c| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} + \left(\overline{d_L} \quad \overline{s_L}\right) \begin{pmatrix} |M_d| & 0 \\ 0 & |M_s| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} + \text{H.c.} \right\}$$

場を再々定義をする

（左巻きと右巻きに同じ位相変換をすれば質量項は不変）

$$\begin{pmatrix} e^{-i\alpha} u \\ e^{-i\beta} c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d \\ e^{-i(\alpha-\gamma)} s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

カビボ混合!!

積は単に ２ x ２ のユニタリ–行列（１角度＋３位相）

$$V_u^\dagger V_d = \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix}$$

一般性を失わずここまで書き換え

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\overline{u_L} \quad \overline{c_L}\right) V_u^\dagger V_d \, \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} W_\mu^+ + \text{H.c.}$$

（フレーバー混合）

小林・益川理論

Progress of Theoretical Physics, Vol. 49, No. 2, February 1973

CP-violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction

Makoto KOBAYASHI and Toshihide MASKAWA

Department of Physics, Kyoto University, Kyoto

(Received September 1, 1972)

In a framework of the renormalizable theory of weak interaction, problems of CP-violation are studied. It is concluded that no realistic models of CP-violation exist in the quartet schme without introducing any other new fields. Some possible models of CP-violation are also discussed.

CPを破る過程は見つかっているけど, CPを破る理論がないという時代背景

3 世代混合

３世代までいれた一般のラグランジアン

$$\mathcal{L}_M = + \left\{ \begin{pmatrix} \overline{u_L^0} & \overline{c_L^0} & \overline{t_L^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{uu} & M_{uc} & M_{ut} \\ M_{cu} & M_{cc} & M_{ct} \\ M_{tu} & M_{tc} & M_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R^0 \\ c_R^0 \\ t_R^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{d_L^0} & \overline{s_L^0} & \overline{b_L^0} \end{pmatrix} (\cdots) \begin{pmatrix} d_R^0 \\ s_R^0 \\ b_R^0 \end{pmatrix} + \mathrm{H.c.} \right\}$$

質量行列は 3 x 3 の複素行列

$$V_L^\dagger \begin{pmatrix} |M_1| & 0 & 0 \\ 0 & |M_2| & 0 \\ 0 & 0 & |M_3| \end{pmatrix} U^R$$

場の再定義をする（今度も左巻きのクオークも再定義）

$$\begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix} = V_u \begin{pmatrix} u_L^0 \\ c_L^0 \\ t_L^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} = V_d \begin{pmatrix} d_L^0 \\ s_L^0 \\ b_L^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix} = U_u \begin{pmatrix} u_R^0 \\ c_R^0 \\ t_R^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix} = U_d \begin{pmatrix} d_R^0 \\ s_R^0 \\ b_R^0 \end{pmatrix}$$

3世代混合

３世代までいれた一般のラグランジアン

$$\mathcal{L}_M = +\left\{ \begin{pmatrix}\overline{u_L} & \overline{c_L} & \overline{t_L}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} |M_u| & 0 & 0 \\ 0 & |M_c| & 0 \\ 0 & 0 & |M_t| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\overline{d_L} & \overline{s_L} & \overline{b_L}\end{pmatrix} (\cdots) \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix} + \text{H.c.} \right\}$$

積は単に３x３のユニタリ−行列（3角度+6位相）

$$V_u^\dagger V_d = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix} (\text{CKM}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}$$

一般性を失わずここまで書き換え

場の再定義をする（今度も左巻きのクオークも再定義）

$$\begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix} = V_u \begin{pmatrix} u_L^0 \\ c_L^0 \\ t_L^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} = V_d \begin{pmatrix} d_L^0 \\ s_L^0 \\ b_L^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix} = U_u \begin{pmatrix} u_R^0 \\ c_R^0 \\ t_R^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix} = U_d \begin{pmatrix} d_R^0 \\ s_R^0 \\ b_R^0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}\overline{u_L} & \overline{c_L} & \overline{t_L}\end{pmatrix} V_u^\dagger V_d \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} W_\mu^+ + \text{H.c.}$$ （フレーバー混合）

3x3 ユニタリ行列

$$VV^\dagger = V^\dagger V = \mathbf{1} \quad (V_{ik}V^*_{jk} = V^*_{ki}V_{kj} = \delta_{ij})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{|V_{11}|^2 + |V_{12}|^2 + |V_{13}|^2} & \text{c.c.} & \text{c.c.} \\ V_{21}V^*_{11} + V_{22}V^*_{12} + V_{23}V^*_{13} & |V_{21}|^2 + |V_{22}|^2 + |V_{23}|^2 & c.c. \\ V_{31}V^*_{11} + V_{32}V^*_{12} + V_{33}V^*_{13} & V_{31}V^*_{21} + V_{32}V^*_{22} + V_{33}V^*_{23} & |V_{31}|^2 + |V_{32}|^2 + |V_{33}|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{|V_{11}|^2 + |V_{21}|^2 + |V_{31}|^2} & \text{c.c.} & \text{c.c.} \\ V^*_{12}V_{11} + V^*_{22}V_{21} + V^*_{32}V_{31} & |V_{12}|^2 + |V_{22}|^2 + |V_{32}|^2 & c.c. \\ V^*_{13}V_{11} + V^*_{23}V_{21} + V^*_{33}V_{31} & V^*_{23}V_{22} + V^*_{23}V_{22} + V^*_{33}V_{32} & |V_{13}|^2 + |V_{23}|^2 + |V_{33}|^2 \end{pmatrix}$$

二乗和が１の範囲でパラメトライズ

$$V_{11} = e^{i\alpha}c_1, V_{21} = e^{i\beta}s_1c_2, V_{31} = e^{i\gamma}s_1s_2$$

さらに自由なパラメータ

$$V_{12} = -e^{i(\psi+\alpha)}s_1c_3, V_{13} = -e^{i(\phi+\alpha)}s_1s_3$$

$$\begin{cases} e^{i\beta}V^*_{22} = e^{-i\psi}(c_1c_2c_3 - \frac{1}{s_1c_2}re^{i\delta}) \\ e^{i\gamma}V^*_{32} = e^{-i\psi}(c_1s_2c_3 + \frac{1}{s_1s_2}re^{i\delta}) \end{cases}$$

１個の複素変数でパラメトライズ

$$V^*_{12}V_{11} + V^*_{22}V_{21} + V^*_{32}V_{31} = -e^{-i\psi}s_1c_1c_3 + e^{i\beta}s_1c_2V^*_{22} + e^{i\gamma}s_1s_2V^*_{33} = 0$$

V_{22}とV_{32}の関係が決まる

3x3ユニタリ行列

$$VV^\dagger = V^\dagger V = \mathbf{1} \quad (V_{ik}V_{jk}^* = V_{ki}^*V_{kj} = \delta_{ij})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |V_{11}|^2+|V_{12}|^2+|V_{13}|^2 & \text{c.c.} & \text{c.c.} \\ V_{21}V_{11}^*+V_{22}V_{12}^*+V_{23}V_{13}^* & |V_{21}|^2+|V_{22}|^2+|V_{23}|^2 & \text{c.c.} \\ V_{31}V_{11}^*+V_{32}V_{12}^*+V_{33}V_{13}^* & V_{31}V_{21}^*+V_{32}V_{22}^*+V_{33}V_{23}^* & |V_{31}|^2+|V_{32}|^2+|V_{33}|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |V_{11}|^2+|V_{21}|^2+|V_{31}|^2 & \text{c.c.} & \text{c.c.} \\ V_{12}^*V_{11}+V_{22}^*V_{21}+V_{32}^*V_{31} & |V_{12}|^2+|V_{22}|^2+|V_{32}|^2 & \text{c.c.} \\ V_{13}^*V_{11}+V_{23}^*V_{21}+V_{33}^*V_{31} & V_{23}^*V_{22}+V_{23}^*V_{22}+V_{33}^*V_{32} & |V_{13}|^2+|V_{23}|^2+|V_{33}|^2 \end{pmatrix}$$

二乗和が１の範囲でパラメトライズ

$$V_{11} = e^{i\,\alpha}c_1, V_{21} = e^{i\,\beta}s_1c_2, V_{31} = e^{i\,\gamma}s_1s_2$$

さらに自由なパラメータ

$$V_{12} = -e^{i\,(\psi+\alpha)}s_1c_3, V_{13} = -e^{i\,(\phi+\alpha)}s_1s_3$$

$$\begin{cases} e^{i\,\beta}V_{22}^* = e^{-i\,\psi}(c_1c_2c_3 - \frac{1}{s_1c_2}re^{i\,\delta}) \\ e^{i\,\gamma}V_{32}^* = e^{-i\,\psi}(c_1s_2c_3 + \frac{1}{s_1s_2}re^{i\,\delta}) \end{cases}$$

１個の複素変数でパラメトライズ

実はδに依存せず r が決まってしまう

$$|V_{12}|^2+|V_{22}|^2+|V_{32}|^2 = s_1^2c_3^2 + (c_1^2c_2c_3^2 + \frac{1}{s_1^2c_2^2}r^2 - 2r\cancel{\frac{c_1c_3}{s_1}\cos\delta}) + (c_1^2s_2c_3^2 + \frac{1}{s_1^2s_2^2}r^2 + 2r\cancel{\frac{c_1c_3}{s_1}\cos\delta}) = 1$$

$$\Rightarrow \quad r = \pm s_1s_2c_2s_3$$

これ以上はパラメータを入れる余地がない（３角度６位相）

すべて代入してみると

$$V_u^\dagger V_d = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\theta_1 & -e^{i(\phi+\alpha)}\sin\theta_1\cos\theta_3 & -e^{i(\phi+\alpha)}\sin\theta_1\sin\theta_3 \\ e^{i\beta}\sin\theta_1\cos\theta_2 & e^{i(\psi+\beta)}(\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 - \sin\theta_2\sin\theta_3 e^{i\delta}) & e^{i(\phi+\beta)}(\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3 + \sin\theta_2\cos\theta_3 e^{i\delta}) \\ e^{i\gamma}\sin\theta_1\sin\theta_2 & e^{i(\psi+\gamma)}(\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 + \cos\theta_2\sin\theta_3 e^{i\delta}) & e^{i(\phi+\gamma)}(\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 - \cos\theta_2\cos\theta_3 e^{i\delta}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1\cos\theta_3 & -\sin\theta_1\sin\theta_3 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 - \sin\theta_2\sin\theta_3 e^{i\delta} & \cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3 + \sin\theta_2\cos\theta_3 e^{i\delta} \\ \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 + \cos\theta_2\sin\theta_3 e^{i\delta} & \cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 - \cos\theta_2\cos\theta_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}$$

一致

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1\cos\theta_3 & -\sin\theta_1\sin\theta_3 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 - \sin\theta_2\sin\theta_3 e^{i\delta} & \cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3 + \sin\theta_2\cos\theta_3 e^{i\delta} \\ \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 + \cos\theta_2\sin\theta_3 e^{i\delta} & \cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 - \cos\theta_2\sin\theta_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Kobayashi, Maskawa (1973)

- 位相の自由度が 1 個残っている
- 実はタイポがあるので一致してない

3世代混合

3世代までいれた一般のラグランジアン

$$\mathcal{L}_M = +\left\{ \begin{pmatrix} \overline{u_L} & \overline{c_L} & \overline{t_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |M_u| & 0 & 0 \\ 0 & |M_c| & 0 \\ 0 & 0 & |M_t| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{d_L} & \overline{s_L} & \overline{b_L} \end{pmatrix} (\cdots) \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix} + \mathrm{H.c.} \right\}$$

場を再々定義をする

（左巻きと右巻きに同じ位相変換をすれば質量項は不変）

$$\begin{pmatrix} e^{-i\alpha} u \\ e^{-i\beta} c \\ e^{-i\gamma} t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d \\ e^{-i\psi} s \\ e^{-i\phi} b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

積は単に 3 x 3 のユニタリ–行列（3角度+6位相）

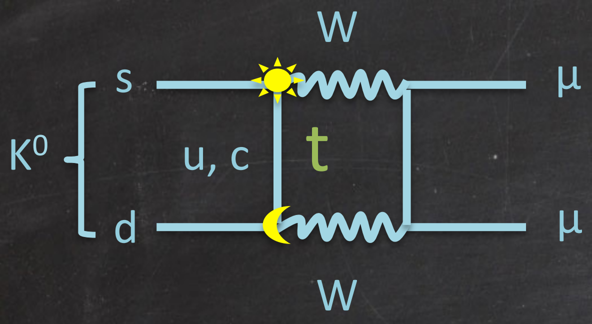
$$V_u^\dagger V_d = \boxed{} \,(\mathrm{CKM})\, \boxed{}$$

2 x 2 とは異なり位相が残っている!!

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \overline{u_L} & \overline{c_L} & \overline{t_L} \end{pmatrix} V_u^\dagger V_d \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} W_\mu^+ + \mathrm{H.c.}$$ （フレーバー混合）

F11”

3 世代のGIM機構



3 x 3 にしても和が t を含むだけ

<u>uの寄与</u> V_{ud}^{*} V_{us} <u>cの寄与</u> V_{cd}^{*} V_{cs}

$$F(M_u)\times(\cos\theta_c)\times(\sin\theta_c) + F(M_c)\times(-\sin\theta_c)\times(\cos\theta_c)$$

質量が同じだとゼロ

$$= [F(M_u)-F(M_c)]\sin\theta_c\cos\theta_c$$

$$\sum_{q=u,c} F(M_q)V_{qd}^{*}V_{qs}$$

$$V^{\dagger}\begin{pmatrix} F(M_u) & 0 \\ 0 & F(M_c)\end{pmatrix}V = V^{\dagger}\left\{F(M_c)\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\text{素通り}} + \begin{pmatrix}F(M_u)-F(M_c) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}V$$

４世代混合？

ここまで，３世代まで発見されていることをあまり気にしませんでした

４世代目が無さそうな理由

- Zの見えない崩壊

$M_Z/2$ より軽いニュートリノは３種類と分かっている

- 電弱精密測定

Wボソンの輻射補正が大きすぎないためには４世代以下と分かっている

- ヒッグスボソンの生成断面積

４世代目があるとヒッグスの生成断面積が約９倍になってしまう

標準模型的(カイラル)でないフェルミオンはOK

CPの破れ

右巻きと左巻きはそもそも別物

標準模型(カイラルな理論)では別粒子として導入した（対称性が破れると質量を通じて混ざる）

$$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, u_R, d_R, L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, e_R, \Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

カイラリティとは？

γ^5 の固有値 $\begin{cases} \gamma^5 \psi_L = -\psi_L \\ \gamma^5 \psi_R = +\psi_R \end{cases}$

$$\psi_L = \mathbf{L}\,\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_R = \mathbf{R}\,\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

カイラル表示

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \frac{1-\gamma^5}{2}, \mathbf{R} = \frac{1+\gamma^5}{2}, \psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

パリティ変換(P)

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overset{\text{P変換}}{\Longleftrightarrow} \quad \gamma^0 \psi_R = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

直感的にはLとRを入れ替えている

(γ^0をかけてカイラリティは戻してある)

QEDとP変換

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

QED(左右対称)

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\,\gamma^\mu D_\mu - M)\psi$$
$$= \overline{\psi_L} i\,\gamma^\mu(\partial_\mu - i\,e\,A_\mu)\psi_L + \overline{\psi_R} i\,\gamma^\mu(\partial_\mu - i\,e\,A_\mu)\psi_R - M(\overline{\psi_L}\psi_R + \overline{\psi_R}\psi_L)$$

P変換

$$x^\mu = (t, \mathbf{x}) \to x_\mu = (t, -\mathbf{x}) = g_{\mu\nu}x^\nu$$

ベクトル量は添字を上げ下げする [γ^μ はただの数の行列なのでそのまま]

$$\psi_L \to \gamma^0\psi_R, \quad \overline{\psi_L} \to \overline{(\gamma^0\psi_R)} = (\gamma^0\psi_R)^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi_R}\gamma^0$$

バー付きの量の変換を確認

$$\overline{\psi_L}\gamma^\mu\psi_L \to \overline{\psi_R}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi_R = \overline{\psi_R}(\gamma^\mu)^\dagger\psi_R = \overline{\psi_R}\gamma_\mu\psi_R$$

$$\overline{\psi_R} i\,\gamma^\mu(\partial_\mu - i\,e\,A_\mu)\psi_R \qquad \overline{\psi_R}\psi_L$$

ラグランジアン上では確かにLRの入れ替え

荷電共役変換(C)

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$$

C変換 $\Updownarrow$

$$-i\,\gamma^2 \psi_R^* = \begin{pmatrix} -i\,\sigma^2 \eta^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i\,\sigma^2 \\ i\,\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^* \end{pmatrix}$$

直感的には複素共役のような気がするが, 同時にLとRを入れ替えている
(やはりカイラリティは元のまま)

QEDとC変換

QED(左右対称)

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\,\gamma^\mu D_\mu - M)\psi$$
$$= \overline{\psi_L} i\,\gamma^\mu(\partial_\mu - i\,e\,A_\mu)\psi_L + \overline{\psi_R} i\,\gamma^\mu(\partial_\mu - i\,e\,A_\mu)\psi_R - M(\overline{\psi_L}\psi_R + \overline{\psi_R}\psi_L)$$

C変換 ⇕

$$i \to -i$$

複素共役をとる

$$\psi_L \to -i\,\gamma^2\psi_R^*, \quad \overline{\psi_L} \to \overline{(-i\,\gamma^2\psi_R^*)} = i\,(\gamma^2\psi_R^*)^\dagger\gamma^0 = i\,\psi_R^T\gamma^0\gamma^2$$

バー付きの量の変換を確認

転置

$$\overline{\psi_L}\gamma^\mu\psi_L \to \psi_R^T\gamma^0\gamma^2\gamma^\mu\gamma^2\psi_R^* = -\psi_R^T(-\gamma^\mu)^T\gamma^0\psi_R^* = (-)\overline{\psi_R}\gamma^\mu\psi_R$$

$$\overline{\psi_R} i\,\gamma^\mu(\partial_\mu - i\,e\,A_\mu)\psi_R \qquad \overline{\psi_R}\psi_L$$

QEDはC不変と課すことで, A_μの変換性が奇と決まる

F18'

パリティ変換(P)と荷電共役変換(C)

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$$

P変換

$$\gamma^0 \psi_R = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

直感的にはLとRを入れ替えている

(γ⁰をかけてカイラリティは戻してある)

C変換

$$-i\,\gamma^2 \psi_R^* = \begin{pmatrix} -i\,\sigma^2 \eta^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i\,\sigma^2 \\ i\,\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^* \end{pmatrix}$$

いずれの変換も元々異なる粒子の間の変換

（ただし，２回やれば戻る）

カイラルな理論では“当然”破れている

（右巻きニュートリノ入ってないですしね…）

直感的には複素共役のような気がするが, 同時にLとRを入れ替えている

(やはりカイラリティは元のまま)

CP変換

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

P変換

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma^0 \psi_R = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}$$

C変換

$$-i\gamma^2 \psi_R^* = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \eta^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

CP変換

$$-i\gamma^2 \gamma^0 \psi_L^* = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \xi^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

元の粒子だけで閉じた変換!!

保存しても(保存しなくて)も良い

本当の意味の粒子反粒子変換

F19’

CPの破れ

背景：C, Pはカイラルな理論では破れているが, CPは保存しても良いと信じられていた

K^0中間子（複素スカラー, パリティ奇）を考える

$$C|K^0\rangle = |\overline{K^0}\rangle$$

荷電共役は粒子と反粒子を変える（複素共役）

CPの固有状態ではない

$$CP|K^0\rangle = C(-|K^0\rangle) = -|\overline{K^0}\rangle$$

パリティの破れの発見はこちら：K_S

CPの固有状態は線形結合

CPが保存すればこちらが物理的状態

$$CP\big(|K^0\rangle - |\overline{K^0}\rangle\big) = +\big(|K^0\rangle - |\overline{K^0}\rangle\big) \quad \text{CP偶}$$

$$CP\big(|K^0\rangle + |\overline{K^0}\rangle\big) = -\big(|K^0\rangle + |\overline{K^0}\rangle\big) \quad \text{CP奇}$$

$K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-$ という崩壊を発見　クローニン, フィッチ (1964)

反応の前後でCPが変わる過程が見つかってしまった

→ しかし, CPを破る理論がない

小林・益川理論

$$\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \overline{u_L} & \overline{c_L} & \overline{t_L} \end{pmatrix} V_{CKM}\, \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \overline{d_L} & \overline{s_L} & \overline{b_L} \end{pmatrix} V_{CKM}^\dagger\, \gamma^\mu \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix} W_\mu^-$$

CP変換

$$\mathcal{L}^{CP} = \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \overline{d_L} & \overline{s_L} & \overline{b_L} \end{pmatrix} V_{CKM}^T\, \gamma^\mu \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix} W_\mu^- + \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \overline{u_L} & \overline{c_L} & \overline{t_L} \end{pmatrix} V_{CKM}^*\, \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} W_\mu^+$$

CP非保存の条件：$V_{CKM} \neq V_{CKM}^*$

位相の有無こそが決定的に重要!!

CKM行列

ウォルフェンシュタイン・パラメトリゼーション

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

カビボ角を決める $V_{us} = \lambda \approx 0.22$

B中間子の寿命を決める $V_{cb} = \lambda^2 A \ \ (A \approx \frac{4}{5})$

ユニタリティを課すと, λ³までは以下の形に決まる　ウォルフェンシュタイン(1983)

$$= \begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda & \lambda^3 A(\rho - i\,\eta) \\ -\lambda & 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda^2 A \\ \lambda^3 A(1-\rho-i\,\eta) & -\lambda^2 A & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4)$$

(位相の取り方を変えると) CPの破れは λの3次 からしか出てこない

参考：小林・益川のオリジナルパラメトリゼーション

$$V_{CKM}^{\rm org} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1\cos\theta_3 & -\sin\theta_1\sin\theta_3 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 - \sin\theta_2\sin\theta_3 e^{i\,\delta} & \cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3 + \sin\theta_2\cos\theta_3 e^{i\,\delta} \\ \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 + \cos\theta_2\sin\theta_3 e^{i\,\delta} & \cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 - \cos\theta_2\cos\theta_3 e^{i\,\delta} \end{pmatrix}$$

PDG パラメトリゼーション

$$\begin{cases} V_{us} = \lambda \\ V_{cb} = \lambda^2 A \\ V_{ub} = \lambda^3 A(\rho - i\,\eta) \end{cases}$$

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

ユニタリティを課すと, λ³までは以下の形に決まる　ウルフェンシュタイン(1983)

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & \lambda^3 A(\rho - i\,\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda^2 A \\ \lambda^3 A(1 - \rho - i\,\eta) & -\lambda^2 A & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4)$$

(位相の取り方を変えると) CPの破れは λの3次 からしか出てこない

PDGが採用したパラメトリゼーション

$$V_{CKM}^{\mathrm{PDG}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\,\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\,\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\,\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\,\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\,\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

一般化したウルフェンシュタイン・パラメトリゼーション

$$\begin{cases} V_{us} = \lambda \\ V_{cb} = \lambda^2 A \\ V_{ub} = \lambda^3 A(\rho - i\,\eta) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} s_{12} = \lambda \\ s_{23} = \lambda^2 A \\ s_{13}e^{-i\,\delta} = \lambda^3 A(\rho - i\,\eta) \end{cases}$$

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

補正は 7次 から　　補正なし

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda^4 & \lambda + \mathcal{O}(\lambda^7) & A\lambda^3(\rho - i\,\eta) \\ -\lambda + \frac{1}{2}A^2\lambda^5[1 - 2(\rho + i\,\eta)] & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda^4(1 + 4A^2) & A\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^8) \\ A\lambda^3(1 - \bar{\rho} - i\,\bar{\eta}) & -A\lambda^2 + \frac{1}{2}A\lambda^4[1 - 2(\rho + i\,\eta)] & 1 - \frac{1}{2}A^2\lambda^4 \end{pmatrix}$$

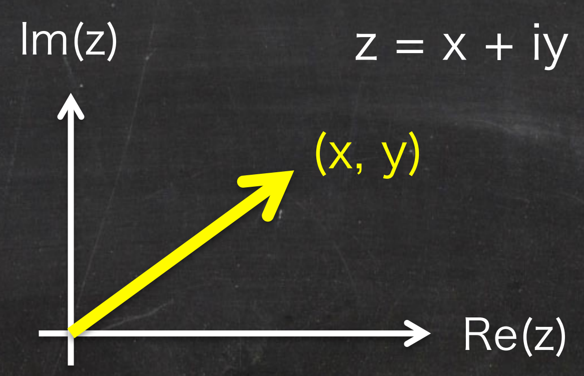
補正は 8次 から

実質的な補正： $\bar{\rho} = \rho\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^4), \;\; \bar{\eta} = \eta\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^4)$

PDGが採用したパラメトリゼーション

$$V_{CKM}^{\rm PDG} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\,\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\,\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\,\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\,\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\,\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

ユニタリティ三角形



ユニタリティ三角形

$$V^\dagger V = \mathbf{1}, \ \ (V_{ki}V^*_{kj} = \delta_{ij})$$

非対角要素 (ij=db) を選んでみる

$$V_{ud}V^*_{ub} + V_{cd}V^*_{cb} + V_{td}V^*_{tb} = 0$$

各成分は

$$V_{ud}V^*_{ub} = (1 - \tfrac{1}{2}\lambda^2 - \tfrac{1}{8}\lambda^4)A\lambda^3(\rho + i\,\eta)$$
$$= A\lambda^3(\bar\rho + i\,\bar\eta) + \mathcal{O}(\lambda^7)$$

バー付きが上手く出てくる

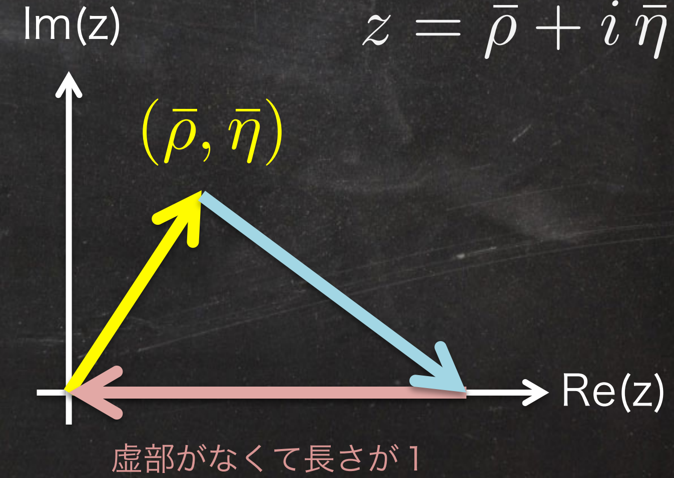
$$V_{cd}V^*_{cb} = \left(-\lambda + \tfrac{1}{2}A^2\lambda^5[1 - 2(\rho + i\,\eta)]\right)A\lambda^2$$
$$= -A\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^7)$$

虚部は λ^7 より小さい

$$V_{td}V^*_{tb} = A\lambda^3(1 - \bar\rho - i\,\bar\eta)(1 - \tfrac{1}{2}A^2\lambda^4)$$
$$= A\lambda^3(1 - \bar\rho - i\,\bar\eta) + \mathcal{O}(\lambda^7)$$

$A\lambda^3$で規格化すると

$$z = \bar\rho + i\,\bar\eta$$



全ての長さが $O(A\lambda^3)$ で, ちょうどいい三角形になった

F23

ユニタリティ三角形

$$V^\dagger V = \mathbf{1},\ \ (V_{ki}V_{kj}^* = \delta_{ij})$$

非対角要素 (ij=sb) を選んでみる

$$V_{us}V_{ub}^* + V_{cs}V_{cb}^* + V_{ts}V_{tb}^* = 0$$

$$\sim A\lambda^4 \qquad \sim A\lambda^2 \qquad \sim -A\lambda^2$$

成分が20倍くらい違う

非対角要素 (ij=ds) を選んでみる

$$V_{ud}V_{us}^* + V_{cd}V_{cs}^* + V_{td}V_{ts}^* = 0$$

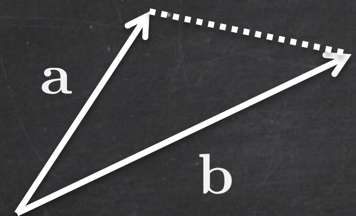
$$\sim \lambda \qquad \sim -\lambda \qquad \sim -A^2\lambda^5$$

成分が400倍くらい違う

F23'

ヤールスコック不変量

２つのベクトルが作る三角形の面積



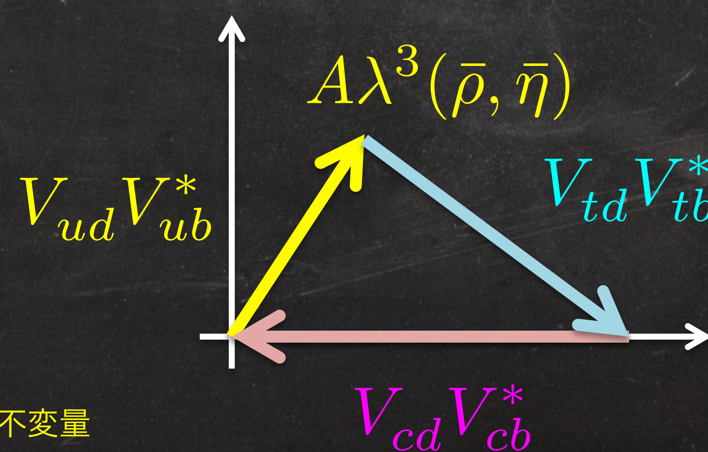
$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|a_x b_y - a_y b_x|$$

複素共役

$$\mathrm{Im}[(a_x + i\, a_y)(b_x - i\, b_y)]$$
$$= \mathrm{Im}[a_x b_x - a_y b_y - i(a_x b_y - a_y b_x)]$$
$$= -(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0$$

ユニタリティ三角形を規格化しないで描くと



$$S = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(V_{ud}V_{ub}^* V_{cd}^* V_{cb})\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(V_{ud}V_{ub}^* V_{td}^* V_{tb})\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(V_{cd}V_{cb}^* V_{td}^* V_{tb})\right|$$
$$= \frac{1}{2}(A\lambda^3)^2\,\bar{\eta} \equiv \frac{1}{2}J_{\mathrm{CP}}$$

Jarskog不変量

F24

ヤールスコック不変量

他の三角形の作る面積：

$$V_{us}V_{ub}^* + V_{cs}V_{cb}^* + V_{ts}V_{tb}^* = 0$$

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0$$

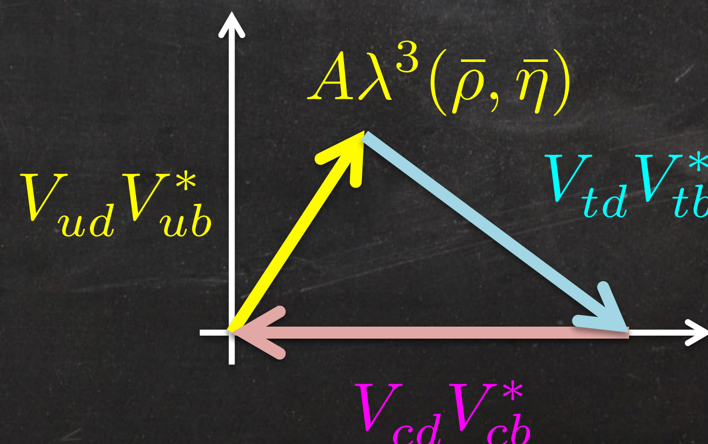
$$S = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(V_{ud}V_{ub}^*V_{cd}^*V_{cb})\right|$$

規格化してない三角形の面積は同じ

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(V_{us}V_{ub}^*V_{cs}^*V_{cb})\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(-V_{ud}V_{ub}^*V_{cd}^*V_{cb} - V_{ub}V_{ub}^*V_{cb}^*V_{cb})\right| \\ &= S \end{aligned}$$

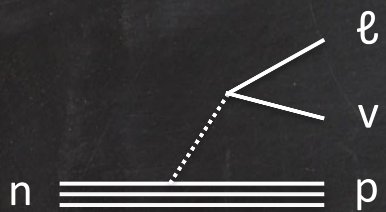
$V_{us}V_{cs}^* + V_{ud}V_{cd}^* + V_{ub}V_{cb}^* = 0$ を使った

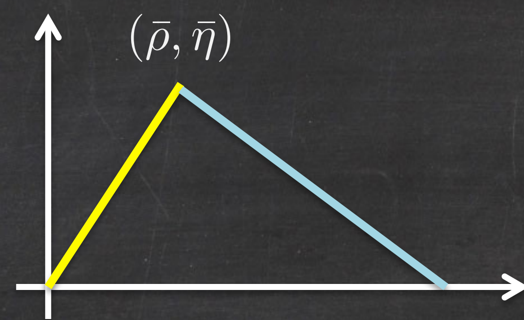
ユニタリティ三角形を規格化しないで描くと

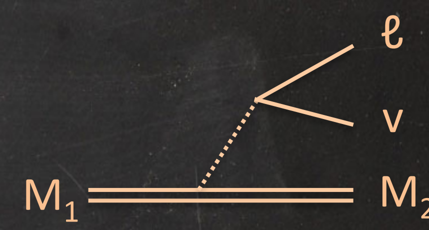


$$\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} + 1 + \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} = 0$$

ユニタリティ三角形の決定







CP位相は良く抑制されているかサブドミナント

CP位相の鍵：V_{ub}

e.g. n→pev

e.g. D→πℓv

e.g. K_L→πℓv

e.g. D→Kℓv

e.g. B→πℓv

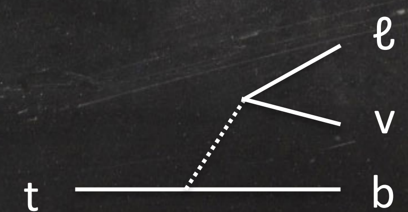
$$V_{\rm CKM} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{8}\lambda^4 & \lambda+\mathcal{O}(\lambda^7) & A\lambda^3(\rho-i\,\eta) \\ -\lambda+\frac{1}{2}A^2\lambda^5[1-2(\rho+i\,\eta)] & 1-\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{8}\lambda^4(1+4A^2) & A\lambda^2+\mathcal{O}(\lambda^8) \\ A\lambda^3(1-\bar{\rho}-i\,\bar{\eta}) & -A\lambda^2+\frac{1}{2}A\lambda^4[1-2(\rho+i\,\eta)] & 1-\frac{1}{2}A^2\lambda^4 \end{pmatrix}$$

e.g. t→bW

e.g. B→Dℓv

もうひとつの鍵：V_{td}

e.g. B^0 mixing

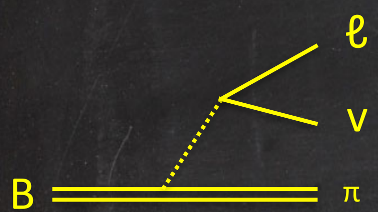


$$\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} + 1 + \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} = 0$$

ユニタリティ三角形の決定

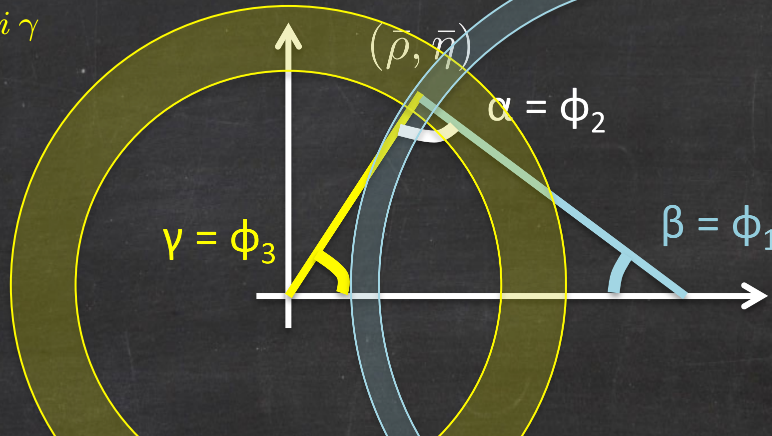
$$\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} = \left|\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right| e^{i\gamma}$$

$$\left(V_{ub} = |V_{ub}|e^{-i\gamma}\right)$$



$$|V_{ub}|^2 \propto (\bar{\rho}^2 + \bar{\eta}^2)$$

単なる円の方程式

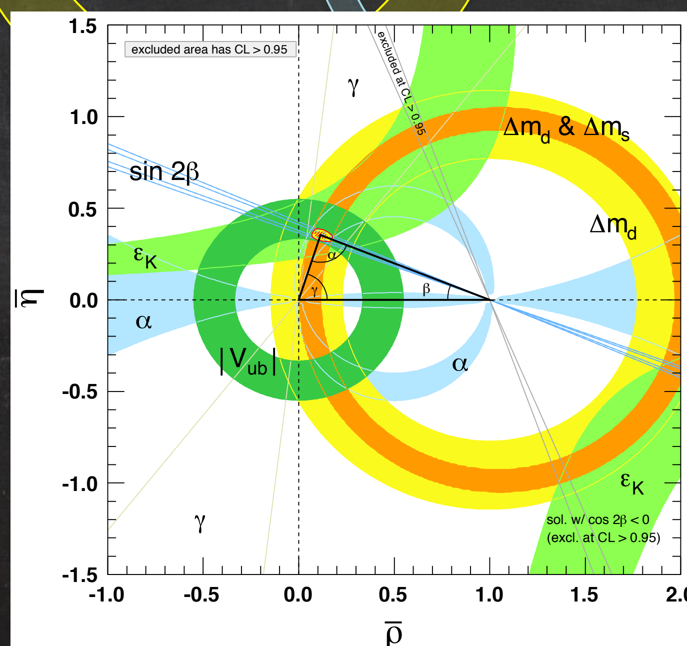


$$\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} = \left|\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right| e^{-i\beta}$$

$$\left(V_{td} = |V_{td}|e^{-i\beta}\right)$$

$$|V_{td}|^2 \propto [(1-\bar{\rho})^2 + \bar{\eta}^2]$$

こっちも, 単なる円の方程式



F25’

ユニタリティ三角形の決定

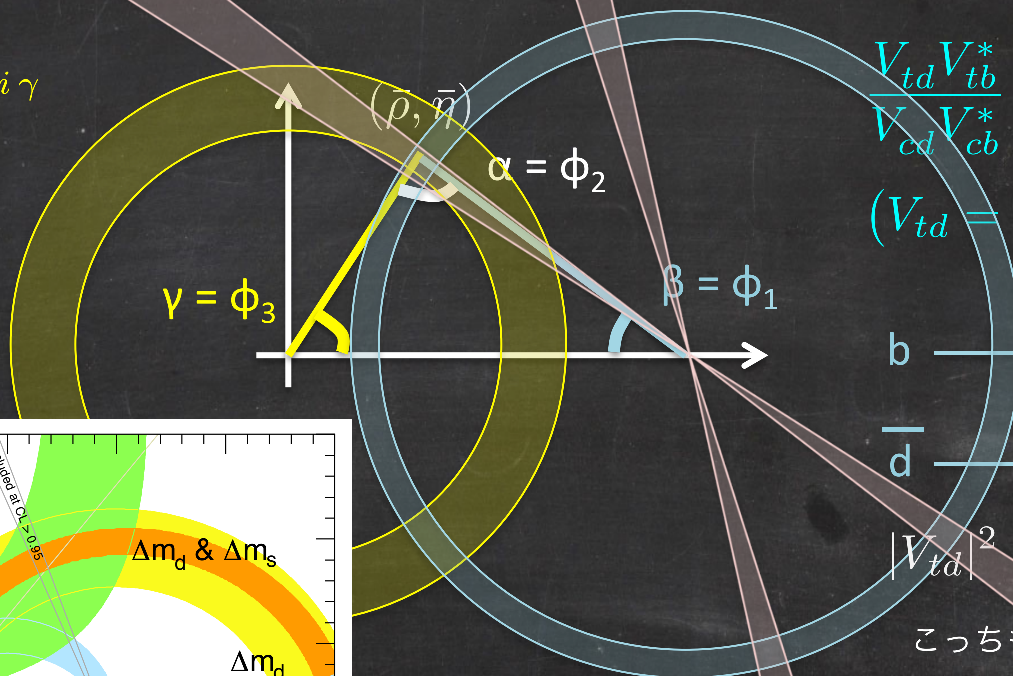
$$\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}+1+\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}=0$$

$$\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}=\left|\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right|e^{i\gamma}$$

$$(V_{ub}=|V_{ub}|e^{-i\gamma})$$

$$\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}=\left|\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right|e^{-i\beta}$$

$$(V_{td}=|V_{td}|e^{-i\beta})$$

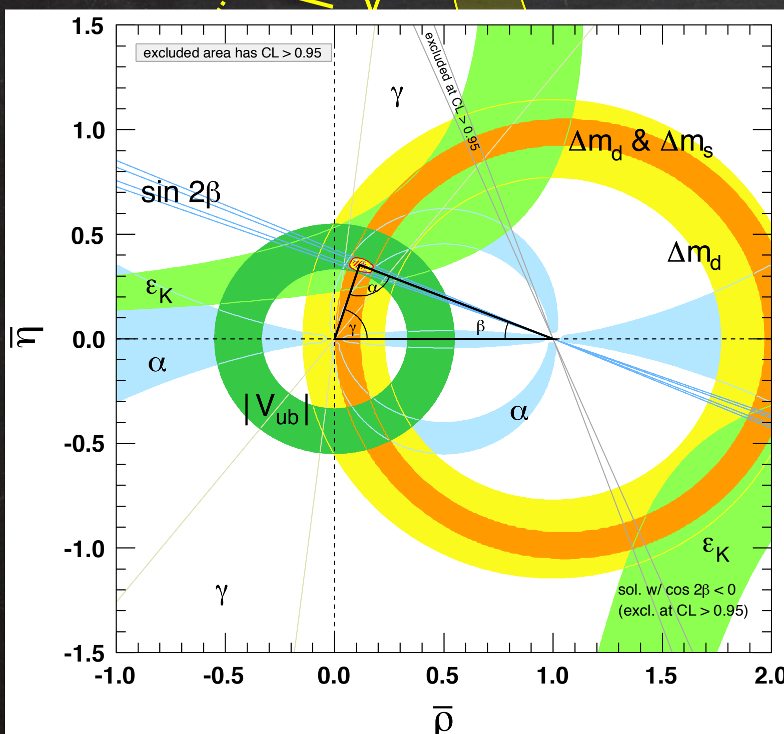


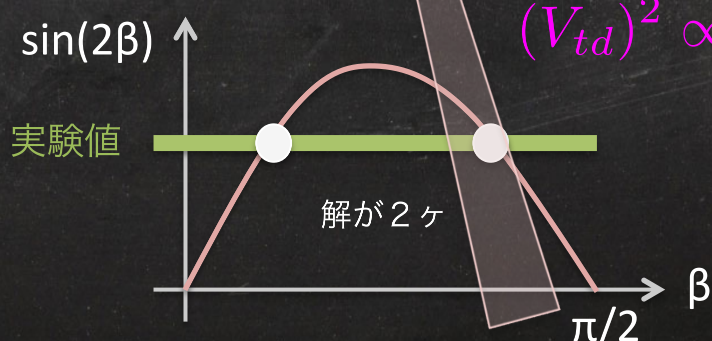
$$|V_{td}|^2\propto[(1-\bar{\rho})^2+\bar{\eta}^2]$$

こっちも, 単なる円の方程式

混合効果を通じて位相も測れる

$$(V_{td})^2\propto e^{-i\,2\beta}$$





F25''

まとめ

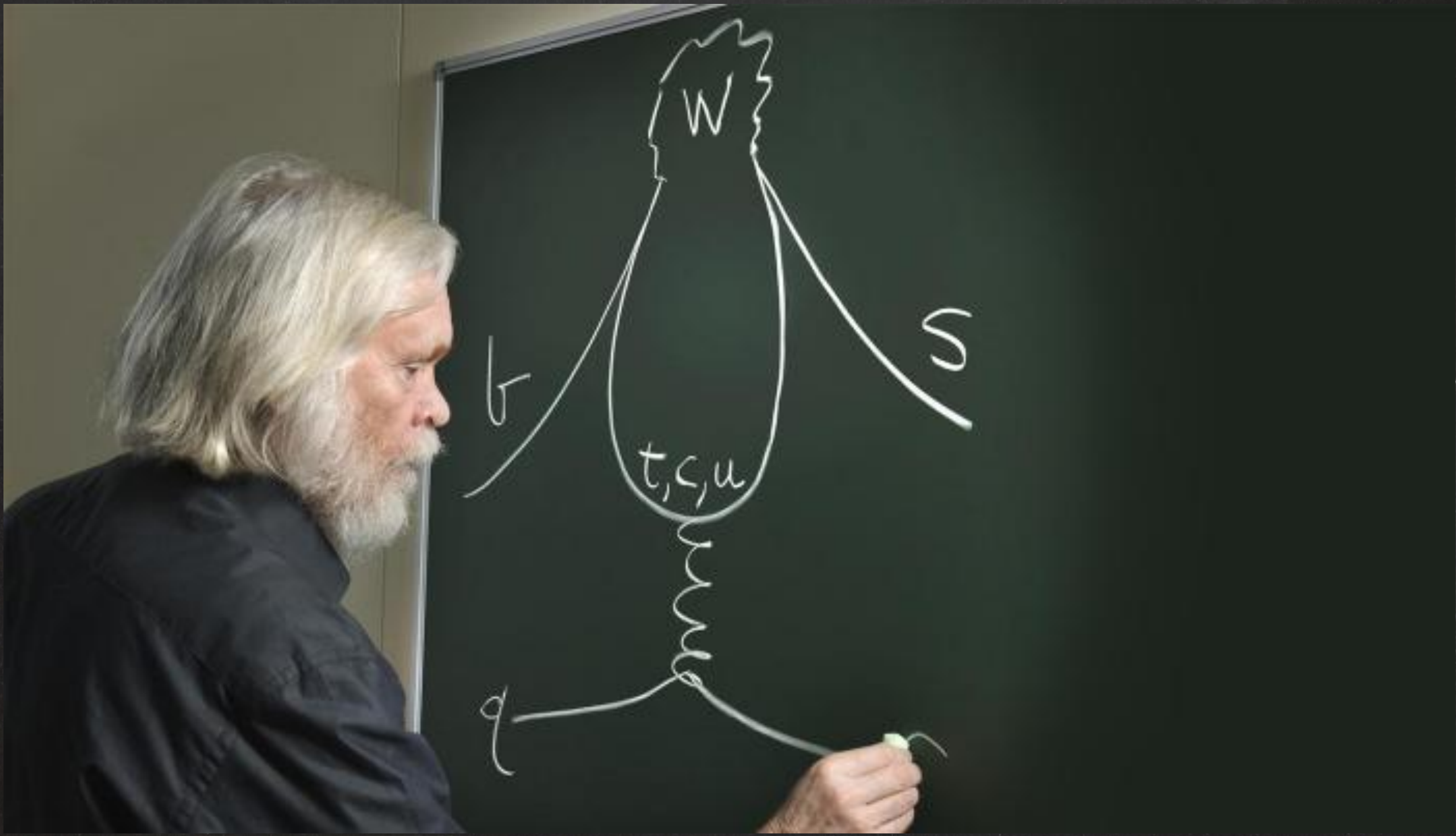
まとめ

- ゲージ変換とは（電磁気学, 量子力学）
- 場の量子論とは（スカラー, QED）
- β 崩壊のフェルミ理論 と その限界
- 隠された対称性
- 素粒子標準模型 と その成功
- 標準模型 と フレーバー
  - フレーバー混合（カビボ混合, GIM機構）
  - CPの破れ（小林・益川理論）
  - ユニタリティ三角形

小林・益川位相だけでは我々の宇宙のバリオン数が生成できない!!

→ 新物理が必要 という話を山本さんがするような気がします

Fin.


W
b
s
t,c,u
q